PSI 2432 - Projeto e Implementação de Filtros Digitais

Exercícios sobre Transformada z

Vítor H. Nascimento e Miguel A. Ramírez

15 de agosto de 2006

1. Um filtro recursivo também pode ser implementado com a estrutura em *treliça* (ou *lattice*, em inglês), como mostrado na fig. 1 para um filtro de ordem 2. Uma das vantagens da estrutura em treliça é que os *coeficientes de reflexão* k_i, como são chamados, têm módulo menor do que um se, e somente se, o filtro for estável. Essa propriedade é útil para implementações em ponto fixo (todos os coeficientes de realimentação são menores do que um), e é particularmente interessante para implementação de filtros recursivos adaptativos.

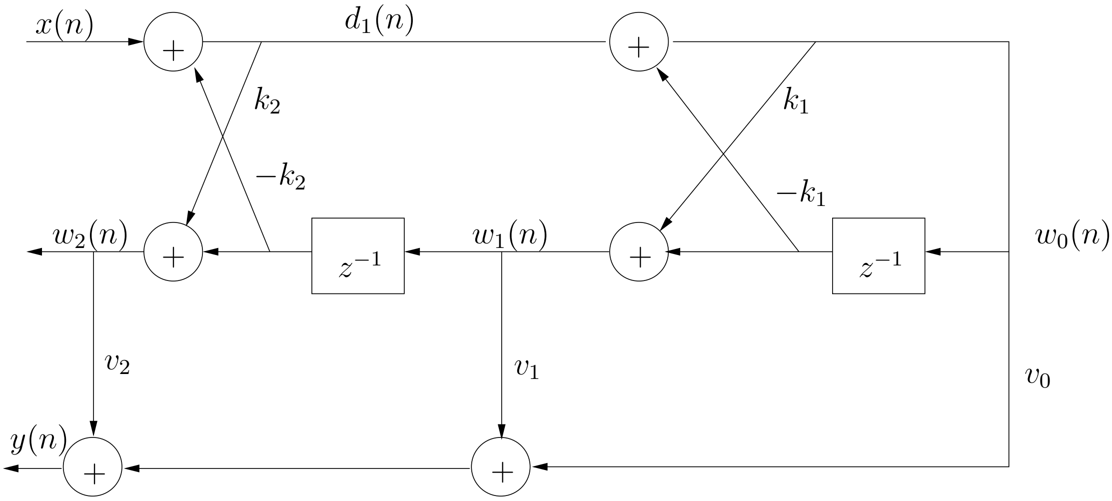

Figura 1: Filtro de 2ª ordem com estrutura em treliça.

O seu exercício é: calcule a função de transferência $H(z)$ que relaciona $X(z)$ e $Y(z)$ para o filtro da fig. 1. Mostre como escolher k_1, k_2, v_0, v_1 e v_2 para implementar uma função de transferência genérica

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

2. Calcule a resposta impulsiva dos filtros seguintes. Quais são causais?

(a)

$$H_1(z) = z + 2 + z^{-3}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

(b)

$$H_2(z) = z^2/(z^2 + 0,5z + 0,04), \quad |z| > 0,4.$$

(c)

$$H_3(z) = z^2/(z^2 + 0,5z + 0,04), \quad 0,1 < |z| < 0,4.$$

(d)

$$H_4(z) = z^3/(z^3 - 1,1z^2 + z - 0,738), \quad z > 0,9055.$$

(e)

$$H_5(z) = 1/(z^3 - 1,1z^2 + z - 0,738), \quad 0,9 < z < 0,9055.$$

3. Determine as respostas impulsivas em função do tempo discreto n associadas a cada função de transferência abaixo para que exista resposta em freqüência. Indique e justifique se seu filtro é causal ou não em cada caso.

(a)

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{8}z^{-3}}$$

(b)

$$H_2(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

(c)

$$H_3(z) = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k \, z^{-k}$$

4. Calcule os fatores de escala K_i de forma que os filtros realizados com cada uma das funções de transferência dadas abaixo apresentem ganho máximo unitário no módulo da resposta em freqüência. Apresente seu desenvolvimento algébrico e os cálculos que realizou para chegar aos seus resultados.

(a)

$$H_1(z) = \frac{K_1}{1 + \frac{1}{8}z^{-3}}$$

(b)

$$H_2(z) = \frac{K_2}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

(c)

$$H_3(z) = K_3 \sum_{k=0}^{100} (-1)^k \, z^{-k}$$

(d)

$$H_4(z) = \frac{K_4}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)}$$

5. O sistema da fig. 2 é uma alternativa para implementação de seções de segunda ordem em filtros recursivos. Para esse sistema, responda:

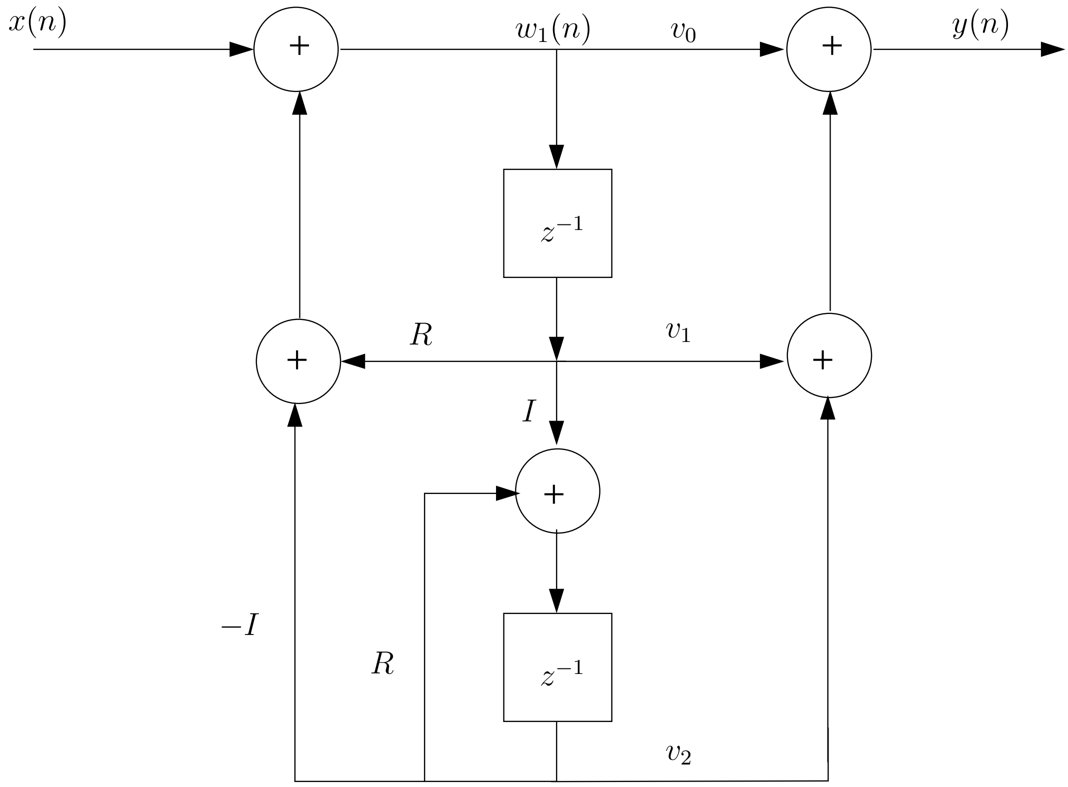

Figura 2: *Implementação de um filtro não-recursivo de segunda ordem (os símbolos v_0, v_1, R, I, etc. sobre ligações entre blocos representam multiplicações por coeficientes, enquanto que os símbolos $x(n)$, $y(n)$, etc. sobre as mesmas ligações representam os sinais em cada ponto).*

(a) Qual é a função de transferência $H(z) = Y(z)/X(z)$?

(b) Para implementar uma resposta genérica

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

como devem ser escolhidos os valores de R, I, v_0, v_1 e v_2 para que $H(z) = G(z)$ (indique um sistema que, resolvido, fornece os valores pedidos em função dos a_i e b_i).

6. A função de transferência de um filtro passa-baixas digital é

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(2 + \sqrt{2})z^2 + 2 - \sqrt{2}}.$$

(a) Esboce a resposta em freqüência desse filtro digital, marcando em especial os ganhos para as freqüências normalizadas $\omega = 0, \pi/2$, e π rad/amostra.

(b) Na entrada do seu filtro digital você coloca o sinal

$$x(n) = 0,2 + 2\cos(\pi/2\ n) - \mathrm{sen}(\pi\ n).$$

Qual é o valor da saída do filtro, *em regime permanente*?

7. Use propriedades da transformada z para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n},$$

em função de a, para $|a| < 1$.

8. Se você aplicar o sinal $x(n) = u(n)$ na entrada de um certo filtro digital $H(z)$, a resposta obtida é

$$y(n) = 10u(n) - 9(0,9)^n u(n).$$

Lembrando que $u(n) = 1$ se $n \geq 0$, e $u(n) = 0$ se $n < 0$, responda:

(a) Qual é a função de rede $H(z)$?

(b) O sistema é estável? Por que?

(c) Se você aplicar o sinal $x_1(n) = \cos(\pi/2n)u(n)$, qual é a saída $y_1(n)$ correspondente *em regime permanente*?

9. Para calcular a resposta em freqüência de um filtro FIR, usamos a definição

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{j\omega n}.$$

(a) Compare a TDF com a expressão acima. Qual é a relação entre as amostras da TDF e $H(e^{j\omega})$?

(b) Mostre como você pode usar a FFT (a transformada rápida de Fourier) para calcular vários pontos de $H(e^{j\omega})$ (mesmo para um número de pontos bem maior do que N).