PSI-2533 - Exercícios para recordação

1. V é uma tensão, variável aleatória com distribuição uniforme $U(-1,1)$, e R é um ruído com distribuição também uniforme $U(-0{,}01, 0{,}01)$, independente de V. Mede-se o sinal $Z = V + R$. Quais são a média e a variância de Z? Qual é a correlação entre V e Z (a média do produto ZV). Qual é a correlação entre V e R?

2. A uma tensão constante V é adicionado um ruído aleatório r com distribuição gaussiana, média zero e variância 1.
   (a) Qual é a função densidade de probabilidade de $v = V + r$?
   (b) Calcule a probabilidade de $v \in [V - 0{,}5; V + 0{,}5]$.

3. Uma variável aleatória X vale -1 com probabilidade $1/2$, e $+1$ com probabilidade $1/2$. Mede-se uma variável $Y = X + r$, em que r é um ruído com distribuição uniforme na faixa $[-0{,}8; 0{,}8]$, independente de X. Responda:
   (a) Qual é a função densidade de probabilidade de Y?
   (b) Quanto valem as médias e variâncias de X e Y? E a correlação entre X e Y?
   (c) Qual é o estimador de mínima variância de X dado Y? Qual é a variância do erro de estimação?
   (d) Qual é o estimador *linear* de mínima variância de X dado Y? Qual é a variância do erro de estimação?

4. Considere os seguintes processos estocásticos:
   (a) Uma moeda é jogada uma única vez. Se der cara, $\boldsymbol{x}_1(n) = \operatorname{sen}(\pi/6n)$ para todo n; se der coroa, $\boldsymbol{x}_1(n) = n$ para todo n.
   (b) A cada instante de tempo joga-se uma moeda. Se o resultado do lançamento no instante n for cara, $\boldsymbol{x}_2(n) = \operatorname{sen}(\pi/6n)$; se for coroa, $\boldsymbol{x}_2(n) = n$ para o instante n apenas. Considere que lançamentos da moeda em instantes diferentes sejam independentes.

   Calcule $\mathrm{E}\,\boldsymbol{x}_i(n)$ e $r_{x_i}(\ell)$ para $\{\boldsymbol{x}_1(n)\}$ e para $\{\boldsymbol{x}_2(n)\}$. O processo é estacionário? Por quê?

5. O processo $\boldsymbol{x}(n) = e^{\boldsymbol{a}n}$ é uma família de exponenciais dependente da variável aleatória $\boldsymbol{a}$. Calcule a média $\mathrm{E}\,\boldsymbol{x}(n)$ e a autocorrelação $r_x(n_1,n_2) = \mathrm{E}\big(\boldsymbol{x}(n_1)\boldsymbol{x}(n_2)\big)$, sabendo que a variável $\boldsymbol{a}$ tem distribuição uniforme $U(-2{,}2)$. O processo é estacionário? Por quê?

6. O processo $\{\boldsymbol{x}(n)\}$ é estacionário no sentido amplo com autocorrelação $r(\ell)$.

   Mostre que $\Pr\big\{|\boldsymbol{x}(n+\ell) - \boldsymbol{x}(n)| \geq \alpha\big\} \leq 2\frac{r(0)-r(\ell)}{\alpha^2}$. Dica: use a *Desigualdade de Chebyshev.*

7. Um sinal $x(n)$ pode ser modelado como um processo estocástico estacionário iid (independente e igualmente distribuído) e tal que a função densidade de probabilidade de $x(n)$ é (para todo n)

$$p_{x(n)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Calcule:
   (a) O valor DC e a potência média de $x(n)$,
   (b) Se $x(n)$ passar por uma não-linearidade, gerando o sinal $y(n) = x^3(n)$, então
      i. Qual é o valor DC de $y(n)$?

ii. Qual é a função de autocorrelação de $y(n)$?

iii. Qual é a potência média de $y(n)$?

8. Um processo estacionário $u(n)$ tem média nula e função de autocorrelação

$$r_u(\ell) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } \ell = -1 \text{ ou } \ell = 1, \\ 1, & \text{se } \ell = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O processo $u(n)$ passa por um filtro FIR gerando o processo $v(n) = u(n) - u(n-1)$. Supondo que $v(n)$ já esteja em regime e possa ser considerado estacionário:

(a) Calcule a média e a função de autocorrelação de $v(n)$,

(b) A densidade espectral de potência de $v(n)$,