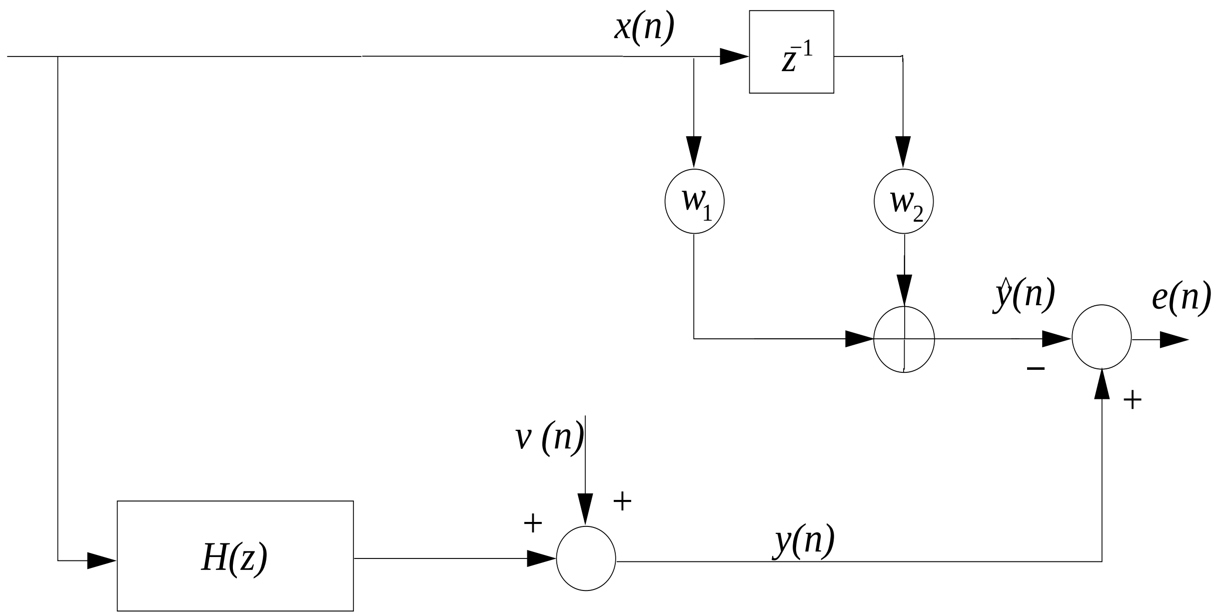
# PSI-2533 — Exercícios resolvidos

Vítor H. Nascimento — EPUSP/2009

1. Deseja-se achar um modelo para o sistema linear representado por $H(z)$ na figura abaixo




Sabendo que $H(z) = 1 + 0{,}5z^{-1}$, e que

- $x(n)$ é um ruído branco com distribuição uniforme, com média 0 e variância 10,
- $v(n)$ é um ruído branco gaussiano com média 0 e variância 0,1, independente de $x(n)$,

faça as seguintes tarefas:

(a) Determine a matriz de autocorrelação $\boldsymbol{R}_x$, o vetor de correlação cruzada $\boldsymbol{r}_{xy}$ e o vetor de coeficientes $\boldsymbol{W}_o$ do melhor estimador linear de $y(n)$ dados $x(n)$ e $x(n-1)$.

(b) Qual é a variância do erro de estimação?

(c) Calcule o máximo valor de $\mu$ para o qual o algoritmo LMS convergiria.

(d) Calcule a potência (variância) do erro do LMS após a convergência, usando as fórmulas vistas em aula, para passo igual à metade do valor que você calculou no item anterior.

**Solução:**

(a) Estamos aproximando $y(n)$ dados $x(n)$ e $x(n-1)$. Portanto, queremos achar coeficientes $w_0, w_1$ tais que

$$y(n) \approx \hat{y}(n) = w_0 x(n) + w_1 x(n-1) = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{X}(n).$$

Os valores ótimos de $w_0$ e $w_1$ são dados por

$$\boldsymbol{W}_o = \boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{r}_{xy} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{x^2(n)\} & \mathrm{E}\{x(n)x(n-1)\} \\ \mathrm{E}\{x(n-1)x(n)\} & \mathrm{E}\{x^2(n-1)\} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{x(n)y(n)\} \\ \mathrm{E}\{x(n-1)y(n)\} \end{bmatrix}$$

Como $x(n)$ é um ruído branco com variância 10, temos $r_x(\ell) = 10\delta(\ell)$, ou seja, $\mathrm{E}\{x(k)x(x-\ell)\} = 10$ se $\ell = 0$ e 0 se $\ell \neq 0$. Assim, $\boldsymbol{R}_x = 10.\boldsymbol{I}$, em que $\boldsymbol{I}$ é a identidade. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{y(n)x(n-k)\} &= \mathrm{E}\{(v(n) + x(n) + 0{,}5x(n-1))x(n-k)\} = \\ &= \mathrm{E}\{v(n)x(n-k)\} + \mathrm{E}\{x(n)x(n-k)\} + 0{,}5\,\mathrm{E}\{x(n-1)x(n-k)\} = \\ &= 0 + r_x(k) + 0{,}5r_x(k-1). \end{aligned}$$

Note que $\mathrm{E}\{v(n)x(n-k)\} = 0$ porque $v(n)$ e $x(n-k)$ são independentes, e ambos têm média zero. Substituindo $k = 0$ e $k = 1$ no último resultado, obtemos $\boldsymbol{r}_{xy} = \begin{bmatrix}10 & 5\end{bmatrix}^T$. Assim,

$$\boldsymbol{W}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(b) Nesse caso, o erro ótimo é $e_o(n) = y(n) - \boldsymbol{W}_o^T\boldsymbol{X}(n) = y(n) - x(n) - 0{,}5x(n-1) = v(n)$. Portanto, $\sigma_o^2 = \mathrm{E}\{e_o^2(n)\} = \sigma_v^2 = 0{,}1$.

(c) O LMS converge para passo

$$\tilde{\mu} \ll \frac{2}{3\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{R}_x} = \frac{2}{3 \times 2 \times 10} = \frac{1}{30}.$$

(d) Se $\tilde{\mu} = 1/60$, então

$$\mathrm{E}\{e^2(n)\} = \sigma_o^2 + \frac{1}{2}\tilde{\mu}\sigma_o^2\,\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{R}_x\} = 0{,}1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60} \cdot 0{,}1 \cdot 2 \times 10 = 0{,}1 + \frac{1}{60}.$$

2. Sabe-se que um processo estocástico estacionário $\{x(n)\}$ é a saída de um filtro linear $H(z)$, em que a entrada é um ruído branco (desconhecido) $v(n)$.

$$v(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x(n)$$

Sabe-se que $H(z)$ tem a forma

$$H(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}}.$$

Deseja-se estimar $a$ e $b$ a partir do conhecimento de $x(n)$ (lembre-se, $v(n)$ não é mensurável).

(a) Escreva uma equação relacionando $x(n)$ a $x(n-1)$ e $v(n)$.

(b) Proponha um problema de estimação linear (usando como variável $X$ e vetor $\boldsymbol{Y}$ apenas valores presentes e passados de $x(n)$) tal que $\boldsymbol{W}_o$ seja relacionado a $a$ e $b$.

(c) Quem será o erro ótimo do seu estimador linear?

(d) Proponha um filtro LMS para estimar $a$ a partir de amostras de $x(n)$ e seus valores passados. Indique claramente como o vetor de estimativas $\boldsymbol{W}(n)$ deve ser atualizado.

**Solução:**

(a) Se $X(z) = H(z)V(z)$, temos $X(z) + az^{-1}X(z) = V(z)$. Antitransformando, obtemos $x(n) + ax(n-1) = v(n)$.

(b) Estamos procurando um problema de estimação linear cuja solução seja relacionada a $a$ e $b$. O problema de estimação deve considerar quais variáveis são observáveis e quais não são. Pela hipótese do problema, $x(n)$ (e obviamente $x(n-1)$) são observáveis, mas não $v(n)$. O importante aqui é notar que podemos escrever

$$x(n) = -ax(n-1) + v(n),$$

em que $v(n)$ é um ruído branco. Assim, parece razoável supor que o estimador linear ótimo de $x(n)$ dado $x(n-1)$ seja

$$\hat{x}(n) = -ax(n-1),$$

e que o erro ótimo de estimação seria $v(n)$.

Há duas maneiras de verificar que isso é verdade. A maneira mais direta é calcular a matriz de autocorrelação e o vetor de correlação cruzada do problema: nesse caso, eles seriam

$$\boldsymbol{R}_x = \mathrm{E}\{x^2(n-1)\} = r_x(0),$$
$$\boldsymbol{r}_{xx} = \mathrm{E}\{x(n)x(n-1)\} = r_x(1).$$

Precisamos então calcular $r_x(1) = \mathrm{E}\{x(n)x(n-1\}$.

$$\begin{aligned} r_x(1) = \mathrm{E}\{x(n)x(n-1)\} &= \mathrm{E}\{(-ax(n-1) + v(n))x(n-1)\} = \\ &= -a\,\mathrm{E}\{x^2(n-1)\} + \mathrm{E}\{v(n)x(n-1)\} = \\ &= -ar_x(0). \end{aligned}$$

A última igualdade vale porque para todo $\ell > 0$, $\mathrm{E}\{v(n)x(n-\ell)\} = 0$. Para ver isso, lembre que $v(n)$ é ruído branco com média nula (portanto $E\{v(n)v(n-k)\} = 0$ para todo $k \neq 0$). Podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{x(n-1)v(n)\} &= \mathrm{E}\{(-ax(n-2) + v(n-1))v(n)\} = \\ &= \mathrm{E}\{[-a(-ax(n-3) + v(n-2)) - \\ &\quad - b(-ax(n-4) + v(n-3)) + v(n-1)]v(n)\}. \end{aligned}$$

Pode-se ver, continuando a substituir $x(n-k) = -ax(n-k-1) + v(n-k)$, que $\mathrm{E}\{x(n-1)v(n)\}$ depende apenas de $\mathrm{E}\{v(n-1)v(n)\}$, $\mathrm{E}\{v(n-2)v(n)\}$, etc. Como todos esses termos são nulos, concluímos que $\mathrm{E}\{x(n-1)v(n)\} = 0$. Da mesma forma, $\mathrm{E}\{x(n-2)v(n)\} = 0$, $\mathrm{E}\{x(n-3)v(n)\} = 0$, etc.

Assim, o estimador linear ótimo de $x(n)$ dado $x(n-1)$ é

$$w_o = (r_x(0))^{-1} r_x(1) = -a,$$

e o erro de estimação ótimo é $e_o(n) = v(n)$.

Para este problema não é necessário calcular $r_x(0)$, mas isso poderia ser feito assim:

$$\begin{aligned} r_x(0) &= \mathrm{E}\{x^2(n)\} = \mathrm{E}\{(ax(n-1) + v(n))^2\} = \\ &= a^2\,\mathrm{E}\{x^2(n-1)\} - 2a\,\mathrm{E}\{x(n-1)v(n)\} + \mathrm{E}\{v^2(n)\} = \\ &= a^2 r_x(0) + \sigma_v^2 \Rightarrow r_x(0) = \frac{1}{1-a^2}\sigma_v^2, \end{aligned}$$

e portanto, $r_x(1) = -a/(1-a^2)\sigma_v^2$.

Há uma outra maneira, mais elegante, de mostrar que $\hat{x}(n) = -ax(n-1)$ é o estimador linear ótimo de $x(n)$ dado $x(n-1)$. Lembre que o estimador linear ótimo é tal que o erro de estimação fica não correlacionado com os dados usados para a estimação. Quer dizer, quando queremos estimar $X$ dado o vetor $\boldsymbol{Y}$, o estimador ótimo é aquele para o qual

$$\mathrm{E}\{(X - \hat{X})\boldsymbol{Y}\} = \mathbf{0}.$$

Vamos ver como usar essa ideia: Se tentássemos estimar $x(n)$ dado $x(n-1)$, se o estimador linear ótimo fosse realmente

$$\hat{x}(n) = -ax(n-1),$$

o erro de estimação seria não correlacionado com $x(n-1)$. No nosso caso, o erro seria $x(n) - (-ax(n-1)) = v(n)$. Como já vimos que $\mathrm{E}\{v(n)x(n-1)\} = 0$, concluímos que $-ax(n-1)$ é realmente o estimador linear ótimo de $x(n)$ dado $x(n-1)$.

(c) Como vimos acima, o erro ótimo é $e_o(n) = x(n) - w_o x(n-1) = v(n)$.

(d) Para estimar $a$ na prática, usaríamos

$$w(n+1) = w(n) + \tilde{\mu} e(n) x(n-1),$$

em que $e(n) = x(n) - w(n)x(n-1)$. Com essa recursão, sabemos que $\mathrm{E}\{w(n)\} \to -a$ quando $n \to \infty$, se o passo for bem menor do que $2/(3\sigma_x^2)$.

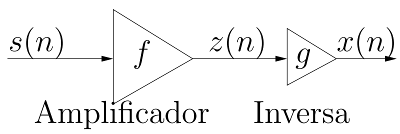
Uma conclusão importante deste exercício é que sabendo que $v(n)$ não é correlacionado com $x(n-1)$ permite que criemos um estimador prático para aproximar $a$, *mesmo sem conhecer* $v(n)$. Esse tipo de raciocício (procurar quais são as partes não-correlacionadas entre uma mistura de sinais) é que permite que se use filtros adaptativos (e estimadores) em um grande número de aplicações. O filtro desenvolvido neste exemplo é chamado *preditor linear*, e é usado entre outras coisas em tratamento de voz.

3. Quando é necessário economizar energia em sistemas de comunicações (como em celulares ou satélites) é importante operar os amplificadores de saída próximo das condições de maior rendimento. Infelizmente, nessas condições aparecem não-linearidades que prejudicam o desempenho do sistema de comunicações. Para reduzir o efeito das não-linearidades, uma solução comum é se aplicar a inversa da não-linearidade do amplificador ao sinal de entrada.

   Para simplificar o problema, suponha que a inversa seja aplicada à saída do amplificador, como mostrado na figura abaixo (na prática é na entrada). Suponha que o sinal de entrada em um amplificador de potência seja $s(n)$, que a saída seja $z(n)$, e que a relação entre os dois possa ser modelada por

$$z(n) = f(s(n)) = 2s(n) + \alpha\sqrt[3]{s(n)}.$$

   Se fosse possível encontrar uma função $g$ tal que $g(f(s(n)) = 2s(n)$, a não-linearidade seria corrigida.




   Como $\alpha$ é desconhecido, a inversa deve ser determinada a partir de medidas de $s(n)$ e $z(n)$. Vamos impor a seguinte estrutura para a inversa:

$$g(z(n)) = w_0 z(n) + w_1 z^3(n),$$

   Suponha que $s(n)$ e $z(n)$ sejam conhecidas, e que $s(n)$ seja uma sequência iid, modulada em PAM, ou seja,

$$s(n) = \begin{cases} -3, & \text{com probabilidade } 1/4, \\ -1, & \text{com probabilidade } 1/4, \\ +1, & \text{com probabilidade } 1/4, \\ +3, & \text{com probabilidade } 1/4. \end{cases}$$

   Responda:

   (a) Mostre como adaptar um vetor de coeficientes $\boldsymbol{W}(n)$ usando o algoritmo LMS, para calcular aproximações para os coeficientes ótimos.

   (b) Determine os valores ótimos de $w_0$ e $w_1$, supondo que $\alpha = 0{,}1$.

   (c) Calcule a variância do erro ótimo $e_0(n) = 2s(n) - x(n)$.

   (d) Qual é o valor máximo do passo de adaptação $\mu$?

   **Solução:**

   (a) Aqui queremos achar uma aproximação para $2s(n)$ dado $z(n) = 2s(n) + \alpha\sqrt[3]{s(n)}$ e $z^3(n)$. Portanto, o algoritmo LMS seria

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + \tilde{\mu} e(n) \begin{bmatrix} z(n) \\ z^3(n) \end{bmatrix},$$

   em que $e(n) = 2s(n) - w_0(n)z(n) - w_1(n)z^3(n)$. Note que, se tudo funcionar adequadamente, deveremos ter $e(n) \approx 0$, e $w_0(n)z(n) + w_1(n)z^3(n) \approx 2s(n)$, que é o sinal que queremos usar.

(b) A utilidade deste item e do próximo é verificar se a estrutura escolhida para o filtro ($w_0(n)z(n) + w_1(n)z^3(n)$) é adequada. Vamos calcular teoricamente qual seria o estimador ótimo, e ver se realmente teremos $e_o(n) \approx 0$. Caso cheguemos à conclusão que $e_o(n)$ é muito grande, seria necessário mudar a estrutura do filtro (usando por exemplo um coeficiente a mais, como $w_0(n)z(n) + w_1(n)z^3(n) + w_2(n)z^5(n)$).

Vamos então calcular os coeficientes ótimos $w_{o,0}$ e $w_{o,1}$. Veja que há um termo não-linear aqui ($z^3(n)$), mas o *estimador* é linear: a estimativa é uma combinação linear de $z(n)$ e $z^3(n)$.

Assim, temos (lembre-se que queremos aproximar $2s(n)$):

$$\boldsymbol{R}_z = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{z^2(n)\} & \mathrm{E}\{z^4(n)\} \\ \mathrm{E}\{z^4(n)\} & \mathrm{E}\{z^6(n)\} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{2sz} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{2s(n)z(n)\} \\ \mathrm{E}\{2s(n)z^3(n)\} \end{bmatrix}.$$

Para calcular esses valores esperados, basta substituir a distribuição de $s(n)$, para o caso de $\alpha = 0{,}1$:

$$s(n) = \begin{cases} -3, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ -1, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ +1, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ +3, \text{ com probabilidade } 1/4. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(n) = \begin{cases} 2(-3) + \alpha\sqrt[3]{-3} = -6{,}1442, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ 2(-1) + \alpha\sqrt[3]{-1} = -2{,}1, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ 2(+1) + \alpha\sqrt[3]{1} = 2{,}1, \text{ com probabilidade } 1/4, \\ 2(+3) + \alpha\sqrt[3]{3} = 6{,}1442, \text{ com probabilidade } 1/4. \end{cases}$$

Assim, $\mathrm{E}\{z^2(n)\} = 0{,}5(6{,}1442)^2 + 0{,}5(2{,}1)^2 = 21{,}0808$, $\mathrm{E}\{z^4(n)\} = 722{,}3119$, $\mathrm{E}\{z^6(n)\} = 26.944{,}14$.

É fácil também calcular $\mathrm{E}\{2s(n)z^\ell(n)\}$, pois $s(n) = -3 \Leftrightarrow z(n) = -6{,}1442$, e assim por diante.

Portanto, $\mathrm{E}\{2s(n)z(n)\} = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6{,}1442 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2{,}1 = 20{,}5327$, e $\mathrm{E}\{2s(n)z^3(n)\} = 705{,}1221$.

Deste modo,

$$\begin{bmatrix} w_{o,0} \\ w_{o,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}0808 & 722{,}3119 \\ 722{,}3119 & 26.944{,}14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20{,}5327 \\ 705{,}1221 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}949187 \\ 7{,}2419635 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

(c) A variância do erro ótimo é dada pela diferença entre a variância do sinal que se deseja aproximar (neste caso, $2s(n)$) e $\boldsymbol{W}_o^T \boldsymbol{r}_{2sz}$:

$$\sigma_o^2 = \mathrm{E}\{(2s(n))^2\} - \boldsymbol{W}_o^T \begin{bmatrix} 20{,}5327 \\ 705{,}1221 \end{bmatrix} = 20 - 20 = 0.$$

Como a variância do erro ótimo é nula, concluímos que a estrutura é adequada, pois $\sigma_o^2 = 0$ significa que $e_o(n) \equiv 0$, ou que $x(n) = 2s(n)$. Se a variância fosse grande, seria necessário trocar a estrutura do linearizador.

(d) O passo de adaptação deve satisfazer $\tilde{\mu} \ll 2/(3(21{,}0808 + 26.944{,}14)) = 2{,}47 \cdot 10^{-5}$.