PSI-2432: Projeto e Implementação de Filtros Digitais
Projeto Proposto: Conversor de taxas de amostragem

Miguel Arjona Ramírez

3 de novembro de 2005

Este projeto consiste em implementar no MATLAB um sistema para troca de taxa de amostragem (sistemas desse tipo são utilizados em telecomunicações e em sistemas multimídia). Nas páginas seguintes você encontra uma discussão sobre teoria de sistemas com variação de taxa de amostragem. O sistema que você deve implementar está descrito abaixo (as seções referidas abaixo estão nas páginas seguintes).

Projete e implemente no MATLAB um dizimador de 48 kHz (taxa alta) para 8 kHz (taxa baixa) e um interpolador de 8 kHz para 48 kHz. Para teste do seu sistema, considere sinais na faixa de 0 a 4 kHz, inicialmente representados na taxa alta, de onde são subamostrados para a taxa baixa e posteriormente superamostrados para a taxa alta. Este último sinal pode então ser comparado com o sinal original. Sugerem-se sinais senoidais com freqüências tomadas numa grade mínima com pontos em 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz e 4 kHz e com comprimento igual a 100 ciclos do sinal de 1 kHz.

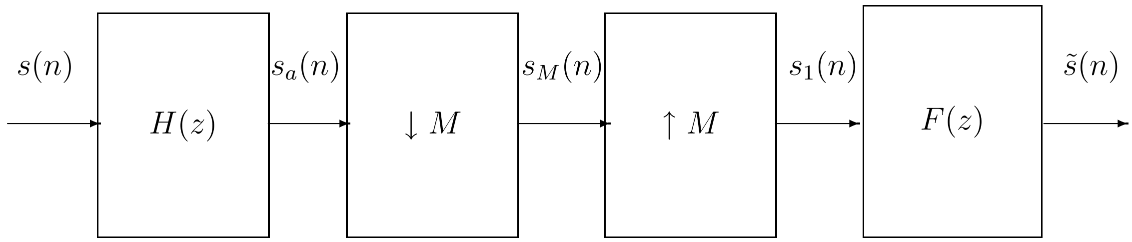
O sistema dizimador-interpolador é composto por um filtro antirrecobrimento $H(z)$, um compressor de taxa de amostragem $\downarrow M$ com fator M, um expansor de taxa de amostragem $\uparrow M$ com fator M e um filtro de reconstrução $F(z)$, como está esquematizado na figura abaixo.

O filtro antirrecobrimento $H(z)$ deve garantir que o sinal passante se localize na banda-base da taxa baixa e deve ter ganho unitário na faixa de passagem conforme discutido na Seção 1. Por outro lado o filtro de reconstrução deve bloquear as imagens do sinal da taxa baixa em torno de múltiplos da sua freqüência de amostragem para que elas não apareçam na taxa alta e seu ganho na faixa de passagem deve ser M conforme discutido na Seção 2. É possível projetar apenas $H(z)$ e tomar o filtro de reconstrução como

$$F(z) = MH(z). \tag{1}$$

Meça a distorção espectral logarítmica entre cada sinal original $s(n)$ e sua versão $\tilde{s}(n)$ após subamostragem seguida de superamostragem, dada pela expressão

$$D_{\mathrm{S}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(20\log_{10}\left|S\left(e^{j\omega_k}\right)\right| - 20\log_{10}\left|\hat{S}\left(e^{j\omega_k}\right)\right|\right)^2}. \tag{2}$$


$s(n)$
$H(z)$
$s_a(n)$
$\downarrow M$
$s_M(n)$
$\uparrow M$
$s_1(n)$
$F(z)$
$\tilde{s}(n)$

Desconsidere as freqüências ω_k em que aconteça

$$20 \log_{10} \left| S \left(e^{j\omega_k} \right) \right| < -50 \text{ dB}$$

ou

$$20 \log_{10} \left| \tilde{S} \left(e^{j\omega_k} \right) \right| < -50 \text{ dB}.$$

Descreva o projeto de seus filtros e apresente os módulos de suas respostas em freqüência e as distorções espectrais logarítmicas D_{S} obtidas. Observe os sinais reconstruídos e apresente algum resultado que julgar interessante. Você consegue reprojetar seus filtros para diminuir as distorções? Explique seu procedimento e apresente os resultados obtidos.

1 Dizimação

Seja dado um sinal $s(n)$ à taxa alta f_a, que se deseja comprimir para f_a/M. Para entender o que acontece ao sinal no processo de compressão da taxa, imaginaremos esse processo precedido por um subamostrador que opera na própria taxa alta. O amostrador opera com uma portadora

$$p(n) = \sum_{k=\infty}^{\infty} \delta(n - kM) \tag{3}$$

que modula o sinal $s(n)$, produzindo o sinal subamostrado

$$s_a(n) = s(n) \cdot p(n). \tag{4}$$

A transformada de Fourier em tempo discreto (TFTD) de $p(n)$ é

$$P \left(e^{j\omega} \right) = 2\pi \sum_{k=0}^{M-1} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{M} k \right). \tag{5}$$

Da Eq. (4), estabelece-se a convolução

$$S_a \left(e^{j\omega} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S \left(e^{j\theta} \right) P \left(e^{j(\omega - \theta)} \right) d\theta, \tag{6}$$

que, junto com a Eq. (5), determina a TFTD de $s_a(n)$ como

$$S_a \left(e^{j\omega} \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S \left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{M} k\right)} \right). \tag{7}$$

O sinal $s_M(n)$ dizimado pelo fator M é obtido a partir do sinal subamostrado $s_a(n)$ como

$$s_M(n) = s_a(Mn), \tag{8}$$

tomando-se cada $M-$ ésima amostra e descartando-se as intermediárias. As TFTDs dessas seqüências relacionam-se por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_M(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(Mn) e^{-j\omega n} \tag{9}$$

que, com a substituição de variáveis $m = Mn$, fica

$$S_M\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_a(m) e^{-j\frac{\omega}{M}m}, \tag{10}$$

que pode ser reconhecida como

$$S_M\left(e^{j\omega}\right) = S_a\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right). \tag{11}$$

Ainda, usando a Eq. (7), obtém-se

$$S_M\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} S\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi}{M}k\right)}\right). \tag{12}$$

Para evitar a distorção de recobrimento ("aliasing"), apenas uma das reproduções espectrais do segundo membro deve existir no intervalo de freqüência de interesse, que é a banda-base da taxa baixa. Para isso, $S\left(e^{j\omega}\right)$ tem que se anular além de $\omega = \pi/M$ até $\omega = \pi$, obtendo-se então

$$S_M\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M} S\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right). \tag{13}$$

Como a escala de freqüências de $S_M\left(e^{j\omega}\right)$ é expandida em M vezes em relação à escala de freqüências de $S\left(e^{j\omega}\right)$, obtém-se pela TFTD inversa um sinal

$$s_M(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_M\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega \tag{14}$$

com a mesma escala de amplitude que o sinal $s(n)$, ou seja, o filtro antirrecobrimento $H(z)$ que é necessário usar antes do compressor de taxa deve ter ganho unitário na faixa de passagem.

2 Interpolação

A interpolação do sinal $s_M(n)$ dado na taxa baixa f_a/M para obter sua representação na taxa alta f_a costuma-se fazer em duas etapas, que são a expansâo da taxa de amostragem e a filtragem de reconstrução.

O expansor da taxa de amostragem simplesmente abre espaço entre as amostras do sinal sinal $s_M(n)$, gerando

$$s_1(n) = \begin{cases} s_M\left(\frac{n}{M}\right) & \text{se } n \text{ for múltiplo de } M \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{15}$$

As TFTDs dessas seqüências relacionam-se por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a\left(\frac{n}{M}\right) e^{-j\omega n} \tag{16}$$

que, com a substituição de variáveis $m = \frac{n}{M}$, fica

$$S_1\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_M(m) e^{-jM\omega m}, \tag{17}$$

que pode ser reconhecida como

$$S_1\left(e^{j\omega}\right) = S_M\left(e^{jM\omega}\right). \tag{18}$$

Desta vez a escala de freqüências de $S_1\left(e^{j\omega}\right)$ é comprimida em M vezes em relação à escala de freqüências de $S_M\left(e^{j\omega}\right)$, e portanto $S_M\left(e^{j\omega}\right)$ é periódica com período $2\pi/M$. No entanto, como aumentamos a taxa de amostragem por um fator M, o sinal obtido deve ter energia somente na faixa $-2\pi/M \leq \omega \leq 2\pi/M$. Isso significa que é preciso passar o sinal $s_1(n)$ por um filtro passa-baixas com corte em $2\pi/M$. Esse filtro é que realiza a interpolação do sinal original entre dois valores não-nulos de $s_1(n)$ (por isso o nome de filtro interpolador...)

Repare que se tomarmos um sinal $s(n)$ em uma taxa de amostragem f_a, subamostrarmos o sinal para uma taxa $f_b = f_a/M$ como visto anteriormente, se voltarmos para a taxa original usando um interpolador, o ganho do filtro de interpolação tem de ser M na faixa de passagem.