PSI-2432: Projeto e Implementação de Filtros Digitais
Exercícios Propostos

1. Para calcular a resposta em freqüência de um filtro FIR, usamos a definição

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j\omega n}.$$

   (a) Compare a TDF com a expressão acima. Qual é a relação entre as amostras da TDF e $H(e^{j\omega})$?

   (b) Mostre como você pode usar a FFT (a transformada rápida de Fourier) para calcular vários pontos de $H(e^{j\omega})$ (mesmo para um número de pontos bem maior do que N).

2. Projete um filtro diferenciador usando a janela de von Hann e as seguintes especificações:

   (a) Resposta aproximadamente igual à de um diferenciador ideal na faixa $0 \le \omega \le \pi$,

   (b) Comprimento do filtro $N = 5$ ou 6.

   (c) Calcule a resposta impulsiva do filtro ideal usando o método de mínimos quadrados (truncamento).

   Tome cuidado ao especificar a fase para calcular a resposta impulsiva do filtro ideal. Que valor você deve usar para N? — ou seja, o filtro deve ser de qual tipo? O tipo de filtro adequado mudaria se a especificação fosse resposta igual à de um diferenciador ideal na faixa $0 \le \omega \le 2\pi/3$ e ganho nulo para o restante da faixa?

3. Use o teorema das alternâncias para esboçar como deve parecer a resposta em freqüência de um filtro não-recursivo passa-altas projetado segundo o critério de Chebyshev (algoritmo de Parks–McClellan), se o número de coeficientes do filtro for 9 e as freqüências-limite forem $0{,}5\pi$ e $0{,}7\pi$ rad/amostra. Suponha que a função de pesos valha 5 na banda de rejeição e 2 na banda-passante. Atenção para deixar claro o que pode e o que não pode ser dito antecipadamente sobre os valores das oscilações em cada banda.

Escolha um conjunto inicial de freqüências para aplicar o algoritmo de Parks-McClellan. Monte o sistema de equações lineares adequado, e ache os valores de freqüências para a próxima iteração (use o Matlab ou o Scilab para isso).

4. Um filtro FIR com fase linear generalizada tem função de rede $H(z)$ com um zero em $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$.

   (a) Mostre que $z_0^{-1} = r_0^{-1} e^{-j\theta_0}$ também deve ser um zero de $H(z)$, por causa da fase linear (dica: use as relações de simetria dos coeficientes do filtro para mostrar que $H(z_0^{-1}) = 0$).

   (b) Suponha que $r_0 = 0,5$, $\theta_0 = \pi/3$. Enumere os conjuntos mínimos de zeros faltantes para que o filtro FIR em questão possa ser alternativamente dos tipos I, II, III e IV.

   (c) Quais são as respostas impulsivas dos filtros dos tipos I, II, III e IV determinados no item anterior?

5. Deseja-se projetar um filtro FIR passa-baixas com fase nula do tipo I, ótimo pelo critério de Chebyshev com borda superior da faixa de passagem $\omega_p = \pi/3$ e borda inferior da faixa de rejeição $\omega_r = \pi/2$ com erros de mesma amplitude nas faixas de passagem e de rejeição. O comprimento da resposta impulsiva desejada é de 11 amostras. Nas figuras 1 e 2 são mostradas a resposta em freqüência de amplitude $A_i(\omega)$ e sua correspondente função de erro de ajuste $E_i(\omega) = A_d(\omega) - A_i(\omega)$, para dois "candidatos" a filtro ótimo, em que $A_d(\omega)$ é a função de amplitude passa-baixas ideal para o projeto em questão, e $A_i(\omega)$ é a resposta do filtro i, $i = 1$ ou 2.

   (a) Identifique e justifique as alternâncias de cada filtro, contando-as e justificando se as condições do teorema da alternância estão satisfeitas para ele.

   (b) Escolha as freqüências extremantes do filtro que mais se aproximar do projeto minimax no item anterior e monte um sistema linear de equações para determinar os coeficientes da função de amplitude para a primeira fase do algoritmo da substituição de Remez.

   (c) Resolva o sistema linear de equações do item anterior e faça o gráfico de sua nova função de amplitude. Quais as semelhanças e diferenças com a função dada? Quais são as novas freqüências extremantes determinadas?

6. Projeto de filtro FIR de fase linear, tipo II, usando a função de amplitude.

   (a) Desenhe um gráfico da resposta em freqüência (módulo e fase) de um filtro passa-baixas ideal com corte em $\pi/3$ rad/amostra.

   (b) Calcule a resposta impulsiva do filtro ideal usando o resultado do item anterior.

   (c) Qual é a resposta em *amplitude* de um filtro passa-baixas ideal com corte em $\pi/3$ rad/amostra? Desenhe um gráfico da amplitude e da fase.

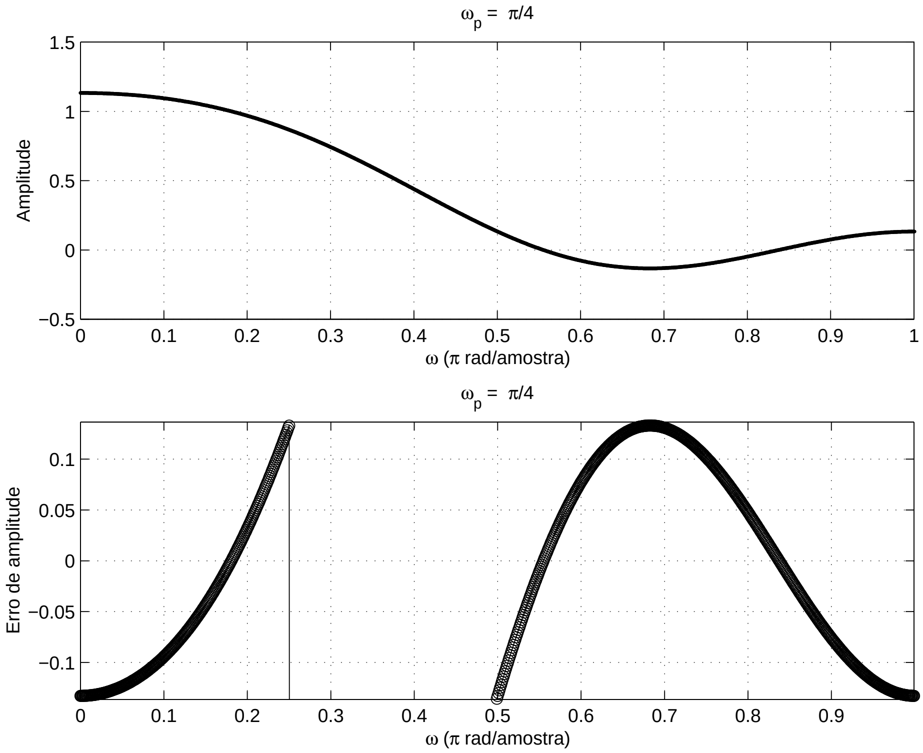

Figura 1: Função de amplitude $A_1(\omega)$ e função de erro de ajuste $E_1(\omega)$.

(d) Calcule a anti-transformada da amplitude (sem a fase), mas considerando um período inteiro da amplitude (cuidado). Compare a anti-transformada obtida com o resultado do item anterior.

(e) Proponha uma forma de projetar filtros de tipo II usando apenas a amplitude da resposta desejada, usando o resultado obtido no item anterior.

7. Projete filtros FIR passa-baixas de fase linear com comprimento $L = 9$ amostras conforme os métodos pedidos em cada item abaixo. Compare com os projetos feitos na lista anterior.

(a) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = 0$ com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(b) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = \pi$ rad/amostra com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(c) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

(d) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = 0$ com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(e) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = \pi$ rad/amostra com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

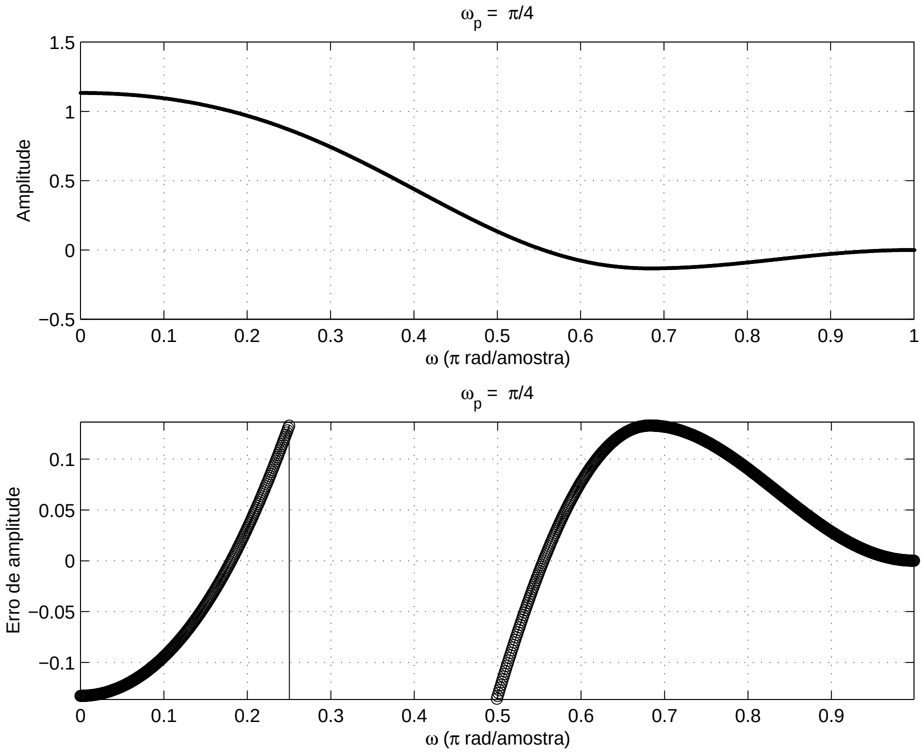

Figura 2: Função de amplitude $A_2(\omega)$ e função de erro de ajuste $E_2(\omega)$.

(f) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

(g) Truncamento com janela de Kaiser da resposta ideal com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude? Qual é o parâmetro β da janela de Kaiser usada?

8. Projete filtros FIR passa-baixas de fase linear com comprimento $L = 10$ amostras conforme os métodos pedidos em cada item abaixo.

(a) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = 0$ com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(b) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = \pi$ rad/amostra com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(c) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

(d) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = 0$ com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(e) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = \pi$ rad/amostra com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$.

(f) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

(g) Truncamento com janela de Kaiser da resposta ideal com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude? Qual é o parâmetro β da janela de Kaiser usada?

9. Projete filtros FIR passa-faixas de fase linear com freqüência central $\pi/2$ rad/amostra, largura de faixa de $\pi/2$ rad/amostra e comprimento $L = 9$ amostras conforme os métodos pedidos em cada item abaixo.

   (a) Amostragem uniforme em freqüência incluindo a freqüência $\omega = 0$ com faixas de transição de largura nula centradas em $\omega_0 = \pi/4$ e $\omega_0 = 3\pi/4$.

   (b) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixas de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/4$ e $\omega_0 = 3\pi/4$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

   (c) Truncamento (com janela retangular) da resposta ideal com faixas de transição de largura $\pi/4$ rad/amostra centradas em $\omega_0 = \pi/4$ e $\omega_0 = 3\pi/4$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude?

   (d) Truncamento com janela de Kaiser da resposta ideal com faixas de transição de largura $\pi/4$ rad/amostra centradas em $\omega_0 = \pi/4$ e $\omega_0 = 3\pi/4$. Qual é seu erro máximo de aproximação da resposta em freqüência de amplitude? Qual é o parâmetro β da janela de Kaiser usada?

10. Para projetar um filtro FIR de tipo I usando o método de amostragem em freqüência, sempre tomamos amostras nas freqüências $\omega_k = k2\pi/N$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Com esse projeto, e como N é ímpar para um filtro tipo I, nunca haverá uma amostra passando por $\omega = \pi$ rad/amostra. Proponha uma forma de projetar um filtro de tipo I por amostragem em freqüência, tal que uma das freqüências amostradas seja π rad/amostra:

    (a) Ache o conjunto de N freqüências $\tilde{\omega}_k$, igualmente espaçado entre 0 e 2π rad/amostra que contém $\omega = \pi$ rad/amostra para N ímpar (escreva uma expressão geral para $\tilde{\omega}_k$).

    (b) Denote por $h(n)$, $0 \leq n < N$ os coeficientes de um filtro cuja resposta em freqüência passe por um conjunto de valores especificados $H_k = H(e^{j\tilde{\omega}_k})$ nas freqüências $\tilde{\omega}_k$. Escreva a expressão dos H_k em função dos $h(n)$.

    (c) A partir da expressão encontrada no item anterior, ache um filtro com coeficientes complexos $\tilde{h}(n)$, $0 \leq n < N$, cuja TDF seja exatamente o conjunto H_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

(d) Mostre como calcular os $h(n)$ a partir dos $\tilde{h}(n)$.

(e) Com os resultados acima, proponha um método para projetar filtros de fase linear e comprimento ímpar, cuja resposta em freqüência passe exatamente por um valor especificado em $\omega = \pi$ rad/amostra.

(f) Generalize o método acima, e proponha um método para projetar filtros cuja resposta em freqüência passe por um valor especificado em uma freqüência ω_0 dada.

11. Projete filtros FIR passa-baixas de fase linear com comprimento $L = 9$ amostras com faixa de transição de largura $\pi/2$ rad/amostra centrada em $\omega_0 = \pi/2$, conforme os métodos pedidos em cada item abaixo.

    (a) Usando o algoritmo de Parks-McClellan. Faça o gráfico da função de amplitude $A(\omega)$ e da função de erro de ajuste de amplitude $E(w)$. Identifique as freqüências extremantes sobre os gráficos. Qual foi o erro máximo obtido dentro das faixas de passagem e de rejeição?

    (b) Assuma que a metade das freqüências extremantes encontra-se uniformemente distribuídas dentro da faixa de passagem e a outra metade encontra-se uniformemente distribuídas dentro da faixa de rejeição. Execute uma iteração do algoritmo de substituição de Remez. Indique os cálculos efetuados. Faça o gráfico da função de amplitude $A(\omega)$ e da função de erro de ajuste de amplitude $E(w)$. Identifique as novas freqüências extremantes sobre os gráficos. Qual foi o erro máximo obtido dentro das faixas de passagem e de rejeição? Compare seu erro máximo com o obtido no item anterior e com aquele obtido no projeto com a janela de Kaiser no item 7g).

12. Projete um filtro usando o algoritmo de Parks-McClellan, com faixa de passagem $0 \leq \omega \leq \pi/3 - 0,1\pi$, e faixa de rejeição $\pi/3 + 0,1\pi \leq \omega \leq \pi$, ondulação na faixa de passagem $\delta_1 = 0,05$ e na faixa de rejeição uma atenuação de pelo menos 45 dB.

13. Projete um filtro de Butterworth, passa-banda, com as seguintes especificações:

    (a) Atenuação máxima na banda-passante de 3 dB, atenuação mínima nas bandas de rejeição de 20 dB.

    (b) Banda-passante: 0,25$\pi \leq \omega \leq$0,75π rad/amostra. Extremos das bandas de rejeição: 0,08π e 0,95π.

14. (Oppenheim e Schafer, *Discrete-time Signal Processing*, 1ª ed., ex. 7.3) Suponha dado um filtro passa-baixas de tempo contínuo com resposta em freqüência $H_c(j\Omega)$, com freqüências críticas Ω_p e Ω_s. Você pode obter vários filtros discretos passa-baixas usando a transformação bilinear

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{\alpha}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}},$$

em que T pode ser variada conforme desejado.

(a) Fixando Ω_p, ache o valor de α tal que a freqüência correspondente ω_p do filtro discreto seja $\pi/2$.

(b) Novamente fixando Ω_p, desenhe o gráfico de ω_p em função de $0 < \alpha < \infty$.

(c) Fixando agora também Ω_s, desenhe o gráfico da largura da faixa de transição $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ do filtro discreto, em função de α.

15. Projete dois filtros FIR passa-baixas de fase linear com comprimento de 7 amostras segundo as especificações abaixo.

(a) Primeiro, use um filtro ideal com faixa de transição de largura nula centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Esboce as respostas em freqüência ideais de amplitude e de fase.

(b) Projete seu primeiro filtro por truncamento da resposta impulsiva do filtro ideal e calcule a resposta impulsiva do filtro projetado.

(c) Em segundo lugar, use um filtro ideal com faixa de transição de largura $\Delta = \pi/4$ centrada em $\omega_0 = \pi/2$. Esboce as respostas em freqüência ideais de amplitude e de fase.

(d) Calcule a resposta impulsiva do filtro ideal.

Sugestão: Esta resposta em freqüência ideal $H_{d_2}(e^{j\omega})$ pode ser expressa como uma convolução entre a resposta em freqüência ideal anterior $H_{d_1}(e^{j\omega})$ e outra resposta em freqüência auxiliar $H_\Delta(e^{j\omega})$. Isto é conveniente no domínio do tempo (por que?). Note que, nessas condições, você deverá determinar um fator de amplitude para $H_\Delta(e^{j\omega})$ obedecendo a expressão da convolução dada por

$$\begin{aligned} H_{d_2}\left(e^{j\omega}\right) &= H_{d_1}\left(e^{j\omega}\right) * H_\Delta\left(e^{j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{d_1}\left(e^{j\theta}\right) H_\Delta\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta. \end{aligned}$$

(e) Projete seu segundo filtro por truncamento da resposta impulsiva do filtro ideal e calcule a resposta impulsiva do filtro projetado.

16. Se você aplicar o sinal $x(n) = u(n)$ na entrada de um certo filtro digital $H(z)$, a resposta obtida é

$$y(n) = 10u(n) - 9(0,9)^n u(n).$$

Lembrando que $u(n) = 1$ se $n \geq 0$, e $u(n) = 0$ se $n < 0$, responda:

(a) Qual é a função de rede $H(z)$?

(b) O sistema é estável? Por que?

(c) Se você aplicar o sinal $x_1(n) = \cos(\pi/2n)u(n)$, qual é a saída $y_1(n)$ correspondente *em regime permanente*?

17. Um sistema de aquisição de dados é tal que freqüências entre 0 e $\pi/2$ rad/amostra têm o ganho alterado pela função $G(e^{j\omega})$ (com freqüência já em rad/amostra)

$$|G(e^{j\omega})| \approx \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\omega/2)}, 0 \leq \omega \leq \pi/2 \text{ rad/amostra.}$$

Você precisa projetar um filtro passa-baixas $H(z)$ (com banda-passante entre 0 e $\pi/2$ rad/amostra) que também compense o efeito do módulo de $G(e^{j\omega})$.

(a) Qual é a resposta do filtro ideal para resolver o problema?

(b) Projete usando o método dos mínimos quadrados (filtro ótimo com janela retangular) um filtro que resolva o problema do item anterior, usando 5 amostras.

Dica: Lembre-se de que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$

e que $e^{j\omega n}$ é uma função com parte real par e parte imaginária ímpar!

(c) Qual seria o parâmetro da janela de Kaiser e o comprimento do filtro que você precisaria usar para que o filtro acima tivesse oscilação em torno da resposta ideal de, no máximo, $\delta = 0{,}01$ se a faixa de transição fosse entre $0{,}4\pi$ e $0{,}6\pi$?

18. Em uma dada aplicação, você tem um sinal (já amostrado) com freqüências na faixa entre $0{,}8\pi$ e π rad/amostra, e precisa projetar um filtro passa-altas. Para essa aplicação, é necessária uma atenuação de pelo menos 40 dB para freqüências menores do que $0{,}1\pi$ rad/amostra, e uma atenuação de, no máximo, 2dB no sinal de interesse.

Projete um filtro recursivo que atenda às especificações acima, usando a aproximação de Butterworth:

(a) Esboce o diagrama de tolerâncias desejado,

(b) Esboce o diagrama de tolerâncias do filtro passa-baixas normalizado equivalente,

(c) Projete o filtro normalizado,

(d) Forneça a função de rede (transformada z) do filtro digital final.

19. Deseja-se um filtro que tenha ganho 2 para as freqüências $0{,}3\pi \leq \omega \leq 0{,}7\pi$ (rad/amostra), e ganho nulo para as outras freqüências. Projete um filtro FIR (não-recursivo) de fase linear que aproxime o filtro desejado, usando a janela de Hamming e comprimento $N = 3$:

(a) Qual é o tipo do filtro (I, II, III ou IV)?

(b) Desenhe a resposta *em amplitude*, $A_{\mathrm{d}}(\omega)$ do filtro desejado.

(c) Ache a resposta impulsiva do filtro ideal, usando a aproximação de mínimos quadrados (integral).

(d) Calcule a resposta impulsiva do filtro real, aplicando a janela de Hamming para $N = 3$.

(e) Sabendo que a janela de Hamming é semelhante à janela de Kaiser com parâmetro $\beta = 4,86$, qual é a amplitude máxima da oscilação esperada na banda passante do filtro? E nas bandas de rejeição?

20. Um filtro FIR com fase linear possui função de amplitude

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos(k\omega).$$

(a) Reescreva a função acima em termos de $e^{j\omega}$, de maneira a obter uma função $H_0\left(e^{j\omega}\right)$.

(b) Determine a função de transferência $H_0(z)$ associada à resposta em freqüência $H_0\left(e^{j\omega}\right)$. Esta função de transferência é implementável como um sistema em tempo discreto? Se for implementável, verifique se o sistema é causal e determine o comprimento de sua resposta impulsiva.

(c) Considerando os filtros FIR com fase linear generalizada dos tipos I, II, III e IV, quais poderiam ter resposta em freqüência intermediada pela função $A(\omega)$ dada? Quais são as respostas impulsivas desses sistemas implementáveis em função dos coeficientes a_k para $k = 0, 1, \ldots, M$?