

# FILTROS NEBULOSOS NO ESPAÇO DE ESCALA

*Hae Yong Kim*

Dept. Eng. de Sistemas Eletrônicos, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo  
Av. Prof. Luciano Gualberto, trav. 3, 158, CEP 05508-900, São Paulo, SP, Brasil  
hae@lps.usp.br, <http://www.lps.usp.br/~hae>

## Sumário

Os filtros nebulosos têm sido utilizados com sucesso em processamento de imagens. O uso das técnicas nebulosas facilita o projeto de filtros bidimensionais, pois um filtro passa a ser especificado através de umas poucas regras nebulosas intuitivas. Por outro lado, o espaço de escala tem sido amplamente utilizado para lidar com o problema de multi-resolução. No presente trabalho, propomos especificar os filtros nebulosos no espaço de escala. Esta união de dois conceitos já clássicos na literatura permite especificar filtros nebulosos que dependem das características de uma vizinhança ampla, ao invés de somente das características locais de alguns poucos pixels de distância. Os conceitos propostos foram implementados e apresentamos os resultados obtidos na detecção multi-escala de arestas e no melhoramento de contraste das extremidades do nível de cinza.

## 1. Introdução

A lógica nebulosa, introduzida por Zadeh [1-2] tem sido tradicionalmente utilizada nas tarefas de alto-nível de visão computacional e reconhecimento de padrões. Como um exemplo, Liu et al. [3] utiliza a lógica nebulosa para o reconhecimento de objetos, invariante por rotação, translação e escala.

Mais recentemente, as técnicas nebulosas também têm sido utilizadas com sucesso para criar diversas classes de filtros não-lineares que permitem realizar as tarefas de baixo-nível de processamento de imagem. Por exemplo, para atenuar ruídos ao mesmo tempo em que se mantém a nitidez das bordas [4]; na criação de filtros de pilha (“stack filters”) nebulosos [5]; para criar operadores morfológicos nebulosos [6-8] e para emular operadores morfológicos [9]. O trabalho de Russo e Ramponi [10] traz um bom resumo do uso das técnicas nebulosas no processamento de imagem.

Notoriamente, o uso das técnicas nebulosas facilita o projeto de filtros bidimensionais, pois um filtro passa a ser descrito no domínio espacial através de umas poucas regras nebulosas, que podem ser compreendidas intuitivamente mesmo por um não-especialista em processamento de imagem.

Por outro lado, o espaço de escala foi proposto originalmente por Witkins em [11] e as suas propriedades mais importantes apresentadas em [12]. Desde a sua introdução, a teoria de espaço de escala tem sido amplamente utilizada em processamento de imagem para lidar com o problema de multi-resolução, juntamente com a estrutura de pirâmide [13] e “wavelets” [14]. Como exemplos de aplicações, o espaço de escala é utilizado para detectar cantos [15] e reconhecer objetos [16]. O espaço de escala original utiliza filtro gaussiano e as suas primeiras derivadas para gerar as imagens em diferentes escalas. Recentemente, o uso dos

filtros não-lineares têm sido proposto para esta mesma tarefa, por exemplo [17] propõe o uso de operadores morfológicos e apresenta as propriedades obtidas neste “espaço de escala não-linear”.

No presente trabalho, propomos aplicar os filtros nebulosos no espaço de escala convencional (gaussiano). Esta união de dois conceitos já clássicos no processamento de imagem, permite especificar facilmente uma ampla gama de filtros. A classe de operadores nebulosos tradicionais permite extrair apenas características locais de alguns poucos pixels de distância. Com o uso de espaço de escala torna-se possível especificar filtros que dependem de uma vizinhança ampla.

Um sistema computacional que implementa os conceitos propostos neste trabalho foi desenvolvido utilizando o paradigma de orientação a objetos. Este sistema foi aplicado na detecção de arestas multi-escala e no melhoramento de contraste das extremidades do nível de cinza.

## 2. Filtros Nebulosos

Definiremos o operador restrito à janela (W-operador) e descreveremos brevemente a estrutura básica de um sistema especialista nebuloso para em seguida definir os filtros nebulosos.

Uma imagem em nível de cinza é normalmente definida como uma função  $Q: \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0..k-1]$ , onde  $k$  é um número inteiro que indica a quantidade de níveis de cinza da imagem  $Q$ . O suporte de uma imagem  $Q$  é um subconjunto finito (ordinariamente retangular) de  $\mathbb{Z}^2$  onde a imagem está realmente definida. O tamanho do suporte é o número de pixels da imagem. Fora do suporte, considera-se que a imagem está preenchida com uma cor-de-fundo.

Neste trabalho, utilizaremos as palavras *filtro* e *operador* como sinônimos, significando uma função que transforma uma imagem numa outra. A maioria dos operadores utilizados na prática são restritos à janela, isto é, a cor de um pixel de saída depende de uma vizinhança do pixel de entrada correspondente. Por exemplo, os filtros lineares espaciais, os operadores morfológicos, os filtros de pilha, os filtros baseados na estatística de ordem, são todos restritos à janela. Na realidade, algumas teorias prevêem a possibilidade de se criar alguns dos operadores acima enumerados não restritos à janela, mas podemos desprezar estes casos pois dificilmente são utilizados na prática. Um W-operador

$$\Psi: (\mathbb{Z}^2 \rightarrow [0..k-1]) \rightarrow (\mathbb{Z}^2 \rightarrow [0..k-1])$$

é definido através de uma janela  $\mathbf{W} = \{W_1, \dots, W_w\}$ ,  $W_i \in \mathbb{Z}^2$  e de uma função característica  $\psi: [0 \dots k-1]^w \rightarrow [0 \dots k-1]$  como segue:

$$\Psi(Q)(p) = \psi(Q(W_1 + p), \dots, Q(W_w + p)), \quad p \in \mathbb{Z}^2.$$

Isto é, um W-operador é completamente caracterizado através da janela e da função característica. Salvo raras exceções, os operadores nebulosos utilizam um sistema especialista nebuloso para especificar a sua função característica. Os operadores morfológicos nebulosos são as exceções mais importantes a esta regra. Como veremos, a especificação do operador torna-se extremamente fácil e intuitivo utilizando um sistema nebuloso.

O nível de cinza de um pixel (um número inteiro no intervalo  $[0 \dots k-1]$ ) deve ser convertido para um número real no intervalo  $[0,1]$  a fim de poder aplicar mais facilmente o sistema especialista nebuloso. Para isso, utilizaremos as funções de “normalização”:

$$N(c) = (2c+1)/(2k), \quad c \in [0 \dots k-1]$$

e de “desnormalização”:

$$N^{-1}(C) = \text{round} \left( k \max \left( \min \left( C, 1 - \frac{1}{2k} \right), \frac{1}{2k} \right) - 0.5 \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as funções  $N$  e  $N^{-1}$ , podemos imaginar que as imagens em nível de cinza sejam funções  $Q: \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0,1]$  e supor que a função característica de um W-operador seja  $\psi: [0,1]^w \rightarrow [0,1]$ .

Os conjuntos nebulosos são extensões de conjuntos clássicos. Diferentemente dos conjuntos clássicos (também chamados na literatura de conjuntos *crespos* em contraposição aos conjuntos nebulosos) onde o grau de pertinência de um elemento ao conjunto é do tipo “sim ou não”, os conjuntos nebulosos permitem pertinências parciais. De fato, um conjunto nebuloso  $F$  de um universo de discurso  $U$  é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_F: U \rightarrow [0,1]$ . Para cada  $x \in U$ ,  $\mu_F(x)$  indica o grau de pertinência de  $x$  ao conjunto nebuloso  $F$ . O suporte de  $F$  é o conjunto de pontos de  $U$  onde  $\mu_F(x)$  é positivo. Um singleton nebuloso  $F$  é um conjunto nebuloso cujo suporte é um único ponto  $x$  de  $U$  e é denotado por  $F = \mu/x$ .

Para facilitar a criação de conjuntos nebulosos, utilizaremos “flat fuzzy numbers”, que são subconjuntos nebulosos de  $\mathbb{R}$  definidos através de uma quádrupla de números reais  $m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$ , denotado por  $\text{FFN}(m_0, m_1, m_2, m_3)$ , e ao qual está associada a seguinte função de pertinência:

$$\mu_{\text{FFN}(m_0, m_1, m_2, m_3)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < m_0 \\ (x - m_0)/(m_1 - m_0), & \text{if } m_0 \leq x < m_1 \\ 1, & \text{if } m_1 \leq x \leq m_2 \\ (m_3 - x)/(m_3 - m_2), & \text{if } m_2 < x \leq m_3 \\ 0, & \text{if } m_3 < x \end{cases}$$

Por exemplo, sejam três ffn’s:

$$\begin{aligned} \text{dark} &= \text{FFN}(-0.5, 0, 0, 0.5); \\ \text{medium} &= \text{FFN}(0, 0.5, 0.5, 1); \\ \text{bright} &= \text{FFN}(0, 0.5, 0.5, 1); \end{aligned} \quad (1)$$

Então (figura 1):

$$\begin{aligned} \mu_{\text{dark}}(0.125) &= 0.75, \\ \mu_{\text{medium}}(0.125) &= 0.25 \text{ e} \\ \mu_{\text{bright}}(0.125) &= 0. \end{aligned}$$

Ao longo deste trabalho, utilizaremos ponto como símbolo decimal.

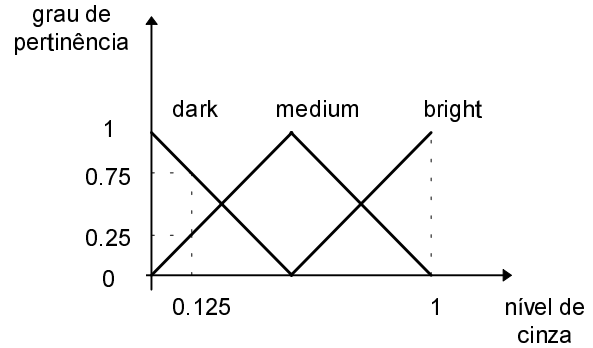


Fig. 1: Exemplos de “flat fuzzy numbers” triangulares.

Os conjuntos nebulosos são as componentes-chaves das regras nebulosas. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois subconjuntos nebulosos de  $\mathbb{R}$ . Uma regra nebulosa é uma afirmação condicional nebulosa da forma:

$$\text{if } x \text{ is } F_1 \text{ then } y \text{ is } F_2. \quad (2)$$

Nesta regra,  $x$  é um número real e  $y$  é um conjunto de singletons nebulosos. Esta regra significa:

1. Calcule o grau de pertinência  $\mu$  de  $x$  a  $F_1$ .
2. Calcule o centro de gravidade  $v$  de  $F_2$ .
3. Faça  $y \leftarrow y \cup \mu/v$ .

Por exemplo, para a regra abaixo

$$\text{if } x \text{ is } \text{medium} \text{ then } y \text{ is } \text{dark}; \quad (3)$$

quando  $x=0.25$ , o grau de pertinência do  $x$  ao *medium* é 0.5. O centro de gravidade de *dark* é 0. Assim,  $y$  deve receber o singleton 0.5/0. A regra acima pode ser escrita equivalentemente explicitando o centro de gravidade do conjunto nebuloso da cláusula consequente:

$$\text{if } x \text{ is } \text{medium} \text{ then } y \text{ is } 0; \quad (4)$$

Numa regra, podem aparecer expressões booleanas nebulosas contendo operadores “and”, “or” e/ou “not”. Neste caso, dois graus de pertinência concatenados pelo operador “and” resulta no menor dos dois graus. O operador “or” denota o maior dos graus. De forma semelhante, o operador “not” denota um menos o grau de pertinência.

Um sistema especialista nebuloso utiliza uma coleção de regras nebulosas com pesos como uma base de conhecimento. Isto é, utilizam-se  $m$  regras nebulosas com pesos  $p_1, p_2, \dots, p_m$  para construir um mapeamento de  $n$  variáveis de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para uma variável de saída  $y$ . Para uma dada entrada de  $n$  números reais, as  $m$  regras fornecem um conjunto de  $m$  singletons  $\{\mu_1/v_1, \mu_2/v_2, \dots, \mu_m/v_m\}$ . O processo chamado defuzzificação deve converter esse conjunto de singletons num número real. A média aritmética ponderada pelo peso da regra é normalmente utilizada para esta finalidade:

defuzzificação  $\{\mu_1/v_1, \mu_2/v_2, \dots, \mu_m/v_m\} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m p_i \mu_i v_i / \sum_{i=1}^m p_i \mu_i, \text{ se } \sum_{i=1}^m p_i \mu_i > 0 \\ \text{cor de fundo, caso contr.} \end{array} \right.$$

Se o peso de uma regra é omitida (como em todos os exemplos mostrados até agora), deve-se assumir o peso um.

Uma regra com cláusula “else” equivale a duas regras complementares com o mesmo peso. Por exemplo:

```
if x is F1 weight 2
then y is F2
else y is F3; (5)
```

Equivale a:

```
if x is F1 weight 2 then y is F2;
if not (x is F1) weight 2 then y is F3; (6)
```

Descrevemos acima o sistema especialista nebuloso utilizado neste trabalho, que corresponde a um sistema nebuloso “típico”. Deve-se notar, porém, que muitos sistemas nebulosos alternativos têm sido propostos na literatura.

Para facilitar a compreensão, vamos ilustrar o uso do sistema especialista nebuloso na especificação de filtros bidimensionais através de alguns exemplos. Sejam:

```
Window = [ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) ];
Black = FFN(-1,0,0,1);
White = FFN(0,1,1,2); (7)
```

As seguintes regras nebulosas podem ser utilizadas para aumentar o contraste:

```
if x[0] is white then y is +1.5;
if x[0] is black then y is -0.5; (8)
```

pois torna um pixel branco “mais branco” e um pixel preto “mais preto” (figuras 2 e 3). Estas duas regras podem ser substituídas pela seguinte regra:

```
if x[0] is white then y is +1.5
else y is -0.5; (9)
```



Fig. 2: “Lenna”.



Fig. 3: aumento de contraste.

As seguintes regras constroem uma dilatação tradicional em nível de cinza com elemento estruturante planar  $1 \times 2$ . Para utilizar um elemento estruturante maior, basta concatenar mais pixels da imagem de entrada pelo operador “or”. A figura 4 mostra dilatação por um elemento estruturante planar  $3 \times 3$ :

```
if x[0] is white or x[1] is white
then y is white;
else y is black; (10)
```

Simplemente mudando “or” por “and” obtemos uma erosão.

Por fim, as seguintes regras especificam um filtro simples detector de arestas (figura 5):

```
variável d:real;
d ← abs(x[0]-x[1])+abs(x[0]-x[2])+
abs(x[0]-x[3]);
if d is black weight 1 then y is +1.14;
if d is white weight 5.1 then y is -0.14; (11)
```



Fig. 4: Dilatação  $3 \times 3$ .



Fig. 5: Detector de arestas.

### 3. Espaço de Escala

Dada uma imagem  $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o seu espaço de escala  $\bar{Q}: (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma imagem tridimensional obtido através da convolução:

$$\bar{Q}(x, y, \sigma) = Q(x, y) * g(x, y, \sigma), \quad \sigma > 0.$$

Usualmente, a função  $g$  é uma gaussiana de duas variáveis (figura 6):

$$g(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}\right]$$

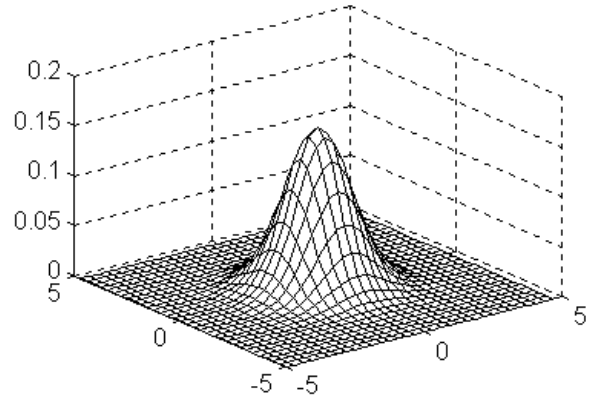


Fig. 6: Função gaussiana de 2 variáveis com  $\sigma=1$ .

Os trabalhos de Witkin, Babaud et al. [11, 12] trazem uma série de razões de conveniências para a escolha da convolução gaussiana. O espaço de escala adiciona uma nova coordenada à imagem. Além das coordenadas  $x$  e  $y$ , agora temos um novo parâmetro  $\sigma$  que caracteriza o nível de resolução da imagem.

Evidentemente, na realidade estamos trabalhando com imagens discretas. Desta forma, a imagem  $Q$  está definida em  $\mathbb{Z}^2$ , ao invés de estar definida em  $\mathbb{R}^2$ , e o seu espaço de escala também deve

ser discreto. Podemos definir o espaço de escala discreto da imagem  $Q$ , dada uma resolução inicial  $\sigma_0$  e um parâmetro de passo  $\lambda$ , para todo inteiro  $n > 0$ , como:

$$\bar{Q}(x, y, n) = Q(x, y) * g(x, y, \sigma_0 \lambda^n)$$

onde  $*$  denota convolução discreta e  $g(x, y, \sigma_0 \lambda^n)$  a função gaussiana amostrada. Definimos, além disso:

$$\bar{Q}(x, y, 0) = Q(x, y).$$

Com isso, o espaço de escala discreta torna-se uma seqüência de imagens com resoluções diferentes, onde o 0-ésimo quadro é a imagem original, e os quadros subseqüentes são imagens com resoluções cada vez mais grosseiras (mais “borradas”, figura 7).

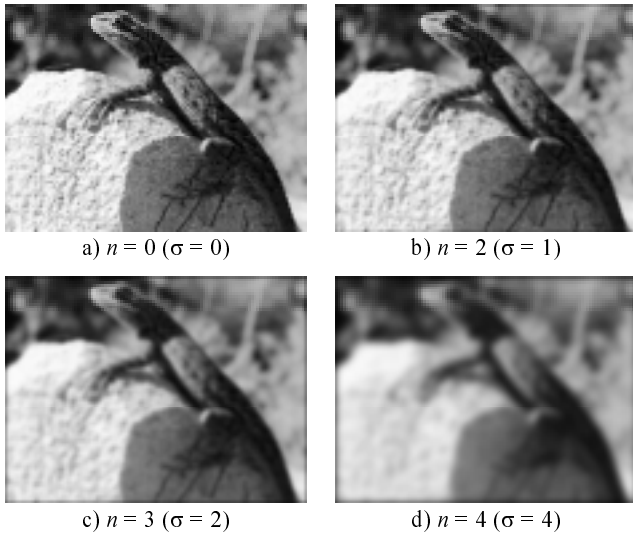


Fig. 7: Espaço de escala discreta com  $\sigma_0=0.5$  e  $\lambda=2$ .

#### 4. Filtros Nebulosos no Espaço de Escala

Os filtros nebulosos podem ser diretamente aplicados no espaço de escala, com resultados interessantes. Por exemplo, se o detector de arestas nebuloso (sistema 11) é aplicado em diferentes quadros do espaço de escala da imagem de lagarto, obtemos uma seqüência de imagens cada vez menos sensíveis às arestas locais (figura 8). Isto permite que o usuário escolha visualmente uma resolução conveniente para a detecção de arestas, decidindo se está interessado nas arestas dos pequenos detalhes ou somente nas arestas dos traços principais da imagem.

Porém, resultados ainda mais interessantes podem ser obtidos quando um filtro nebuloso é projetado para gerar saída a partir das informações contidas em diferentes escalas. Descreveremos aqui uma técnica para melhorar o contraste das extremidades do nível de cinza.

Algumas vezes, não conseguimos distinguir bem os detalhes das regiões onde o nível de cinza médio é muito escuro ou muito claro, apesar de ser possível observar com bastante nitidez as demais regiões. Este problema acontece com a imagem de lagarto (7a) e também com a imagem da moça (9a, cuja ampliação encontra-se em 10a). Na figura do lagarto, é difícil observar os detalhes do pescoço do animal (muito escuros) assim como os detalhes da parte iluminada da pedra (muito claros). Na figura da

moça é difícil visualizar os detalhes do lenço da moça (muito escuros) assim como os das flores brancas (muito claros). Notamos aqui que a imagem 7a foi obtida simplesmente procedendo à equalização convencional de histograma, enquanto o histograma da imagem 9a foi manipulado artificialmente para acentuar o efeito visual em estudo.

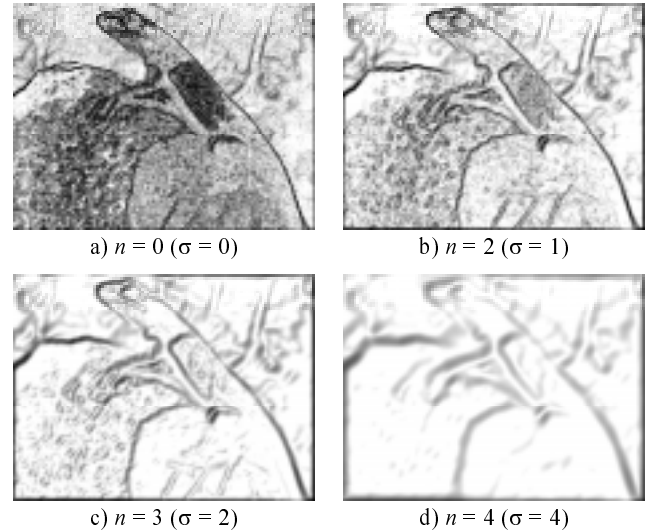


Fig. 8: Detector de arestas nebuloso no espaço de escala.

A filtragem homomórfica é normalmente utilizada em situações semelhantes. O filtro homomórfico assume que a intensidade de um pixel  $Q(x, y)$  é o resultado da multiplicação da iluminação  $I(x, y)$  pela reflectância  $R(x, y)$ :

$$Q(x, y) = I(x, y)R(x, y).$$

E procura, em essência, diminuir a variação do componente  $I(x, y)$  ao longo da imagem. Isto melhora a visibilidade tanto das regiões de sombra quanto das regiões excessivamente iluminadas. O filtro homomórfico consegue distinguir variação de iluminação da variação de reflectância assumindo que a iluminação deve variar lentamente no domínio espacial (isto é, são componentes de baixa freqüência) enquanto que a reflectância deve variar rapidamente. As variações rápidas de nível de cinza das regiões de sombra serão amplificadas e as das regiões excessivamente iluminadas serão amortecidas pelo filtro homomórfico.

Este modelo funciona perfeitamente na figura do lagarto (7a), onde as regiões escuras e claras são formadas pela variação do componente de iluminação  $I(x, y)$ . Ora, porém, no caso da figura da moça (9a), não há mudança brusca de iluminação  $I(x, y)$  do lenço para a flor branca, mas sim há variação acentuada da reflectância  $R(x, y)$ . Neste e em todos os caso semelhantes, o filtro homomórfico não é adequado, pois queremos que as variações rápidas de nível de cinza sejam amplificadas tanto na região escura quanto na região clara.

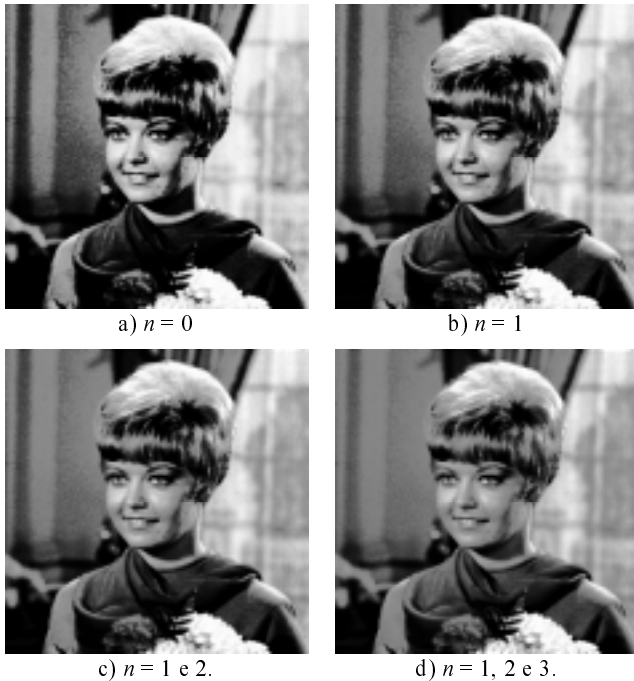


Fig. 9: Aumento de contraste das extremidades do nível de cinza ( $\sigma_0=0.5$  e  $\lambda=1.8$ ).

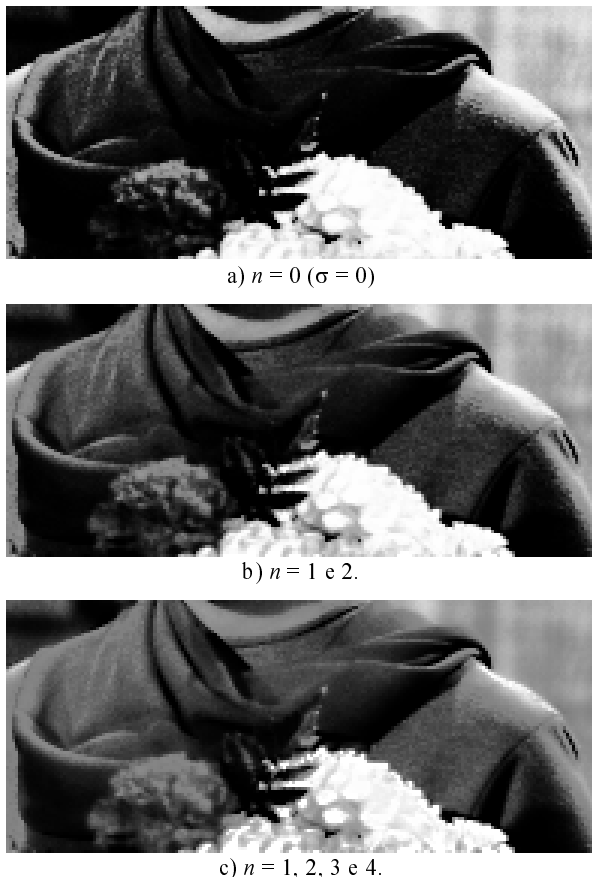


Fig. 10: Detalhes ampliados de lenço e das flores.

Uma variação rápida de nível de cinza pode ser detectada comparando o nível de cinza de um pixel com o nível médio dos pixels circunvizinhos. E esta variação pode ser ampliada pelo seguinte sistema nebuloso:

```

if (neighbor is white) and (pixel is white)
  weight 1.5 then y is white;
if (neighbor is black) and (pixel is black)
  weight 1.5 then y is black;
if (neighbor is white) and (pixel is black)
  weight 1.0 then y is -0.3;
if (neighbor is black) and (pixel is white)
  weight 1.0 then y is 1.3; (12)

```

Observe que se a cor da vizinhança é igual à cor do pixel (regras 1 e 2), a saída recebe a própria cor do pixel. Caso sejam diferentes (regras 3 e 4), a diferença entre a vizinhança e o pixel é amplificada. A superfície gerada por estas regras pode ser visualizada na figura 11.

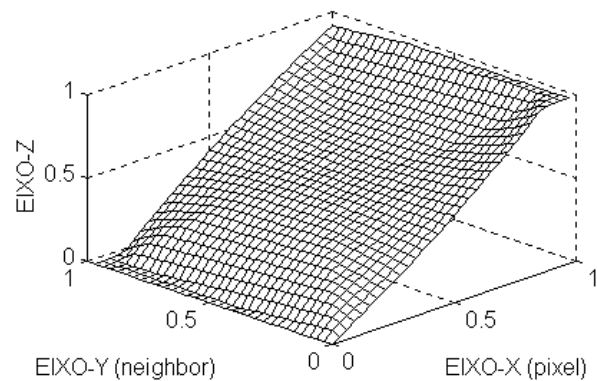


Fig. 11: Função gerada pelas regras nebulosas para aumentar contraste das extremidades do nível de cinza.

Porém, surge uma pergunta: Qual é a melhor escolha para o tamanho da vizinhança? Acreditamos que nenhuma escolha é adequada. E o uso de espaço de escala permite-nos contornar o problema de ter de escolher um tamanho da vizinhança, trabalhando com diferentes tamanhos de vizinhança. Para isso, basta aplicar repetidamente as regras nebulosas acima para vizinhanças com diferentes resoluções  $\sigma$ , fornecidas pelo espaço de escala discreto. Os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras 9 e 10.

## 5. Implementação

Os conceitos propostos foram implementados na linguagem C++, apesar de termos utilizado uma linguagem semelhante a Pascal nas descrições dos sistemas nebulosos para melhorar a legibilidade. A linguagem C++ oferece uma série de recursos que permitem implementar naturalmente um sistema nebuloso, utilizando somente os recursos da linguagem, sem ter que escrever um compilador ou um interpretador de sistema nebuloso. Assim, o sistema 9 para aumentar o contraste torna-se:

```

OUTVAR y;
fifelse( x(1,c)==white, 1, y, 1.5, -0.5); (13)

```

O comando *fifelse* significa “fuzzy if-else”. O número 1 é o peso da regra. Evidentemente, o comando acima deve estar dentro de um laço duplo que varia *l* e *c*. A dilatação (sistema 10) torna-se:

```
OUTVAR y;
fifelse( x(l,c)==white || x(l,c+1)==white),
        1, y, white, black);           (14)
```

Por fim, o sistema 12 torna-se:

```
OUTVAR y;
fif(neig(i,l,c)==white && pix(i-1,l,c)==white,
    1.5, y, 1.0);
fif(neig(i,l,c)==white && pix(i-1,l,c)==black,
    1.0, y,-0.3);
fif(neig(i,l,c)==black && pix(i-1,l,c)==white,
    1.0, y, 1.3);
fif(neig(i,l,c)==black && pix(i-1,l,c)==black,
    1.5, y, 0.0);
pix(i,l,c)=defuzzificação(y);           (15)
```

A variável *i* denota o índice de resolução do espaço de escala discreto e os comandos acima devem estar dentro de um laço triplo que varia *i*, *l* e *c*. Antes de iniciar o laço triplo, devemos fazer

```
pix(0)=neig(0);                       (16)
```

para que a saída para resolução  $\sigma=0$  seja igual à entrada com  $\sigma=0$ .

A biblioteca de rotinas utilizados para gerar os exemplos deste trabalho encontra-se em <http://www.lps.usp.br/~hae>. Estas rotinas encontram-se num estágio ainda bastante preliminar.

## 6. Conclusão

Neste trabalho, introduzimos o uso de filtros nebulosos no espaço de escala. Esta união de dois conceitos já clássicos na literatura de processamento de imagem permite obter uma classe ampla de novos filtros. A classe de operadores nebulosos tradicionais permite extrair apenas características locais de alguns poucos pixels de distância. Com o uso de espaço de escala, torna-se possível construir filtros nebulosos que dependem de uma vizinhança ampla. Os conceitos propostos foram implementados em C++ e alguns exemplos de uso foram mostrados. Atualmente, estamos pesquisando outras aplicações para os filtros nebulosos no espaço de escala.

## 7. Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer à FAPESP pelo auxílio financeiro recebido.

## 8. Referências

- [1] L.A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [2] L.A. Zadeh, “Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes,” *IEEE T. System Man Cybern.*, vol. SMC-3, no. 1, pp. 28-44, 1973.
- [3] X.F. Liu, S.H. Tan, V. Srinivasan, S.H. Ong, W.X. Xie, “Fuzzy Pyramid-Based Invariant Object Recognition,” *Pattern Recognition*, vol. 27, no. 5, pp. 741-756, 1994.

- [4] F. Russo and G. Ramponi, “Fuzzy Operators for Sharpening of Noisy Images,” *Electr. Lett.*, vol. 28, no. 18, pp. 1715-1717, 1992.
- [5] P.T. Yu and R.C. Chen, “Fuzzy Stack Filters - Their Definitions, Fundamental Properties, and Application in Image Processing,” *IEEE T. Image Processing*, vol. 5, no. 6, pp. 838-854, 1996.
- [6] D. Sinha and E.R. Dougherty, “Fuzzy Mathematical Morphology,” *J. Visual Comm. and Image Representation*, vol. 3, no. 3, pp. 286-302, 1992.
- [7] D. Sinha and E.R. Dougherty, “A General Axiomatic Theory of Intrinsically Fuzzy Mathematical Morphologies,” *IEEE T. Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 389-403, 1995.
- [8] I. Bloch and H. Maître, “Fuzzy Mathematical Morphologies: A Comparative Study,” *Pattern Recognition*, vol. 28, no. 9, pp. 1341-1389, 1995.
- [9] H.Y. Kim, F.A.M. Cipparrone and M.T.C. Andrade, “Technique for Constructing Grey-Scale Morphological Operators Using Fuzzy Expert System,” *Electron. Lett.*, vol. 33, no. 22, pp. 1859-1861, 1997.
- [10] F. Russo, “Nonlinear Fuzzy Filters: An Overview,” *Proc. European Signal Processing Conf.* (Trieste, Italy), pp. 1709-1712, 1996.
- [11] A.P. Witkin, “Scale-Space Filtering,” *Proc. 7th. Joint Conf. Artificial Intelligence* (Karlsruhe, Germany), pp. 1019-1023, 1983.
- [12] J. Babaud, A.P. Witkin, M. Baudin and R.O. Duda, “Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scale-Space Filtering,” *IEEE T. Pattern Analysis and Machine Intell.*, vol. PAMI-8, no. 1, pp. 26-33, 1986.
- [13] J.M. Jolico and A. Rosenfeld, *A Pyramid Framework for Early Vision*, Kluwer, 1994.
- [14] K.R. Castleman, *Digital Image Processing*, Prentice-Hall, 1996.
- [15] F. Mokhtarian and R. Suomela, “Robust Image Corner Detection Through Curvature Scale Space,” *IEEE T. Pattern Analysis and Machine Intell.*, vol. 20, no. 12, pp. 1376-1381, 1998.
- [16] G. Bebis, G. Papadourakis and S. Orphanoudakis, “Curvature Scale-Space-Driven Object Recognition with an Indexing Scheme Based on Artificial Neural Networks,” *Pattern Recognition*, 32, pp. 1175-1201, 1999.
- [17] P.T. Jackway and M. Deriche, “Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Dilation-Erosion,” *IEEE T. Pattern Analysis and Machine Intell.*, vol. 18, no. 1, pp. 38-51, 1996.