

Reconstrução-Difusão: Um Algoritmo de Reconstrução MENT Melhorado Baseado em Difusão Anisotrópica Robusta

Harold I. A. Bustos, Hae Yong Kim

Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

Resumo - Máxima entropia (MENT) é uma técnica de reconstrução bem conhecida baseada na otimização do funcional de custo entropia. Se unicamente uma quantidade pequena de dados de aquisição estiver disponível, o resultado deste algoritmo converge a uma imagem ruidosa e pouco nítida. Propomos uma melhoria deste algoritmo que consiste em aplicar alternadamente o MENT e a Difusão Anisotrópica Robusta (RAD). Testamos esta idéia para reconstrução a partir de aquisição de dados em paralelo e ângulo completo, mas a idéia pode ser aplicada a qualquer cenário de aquisição de imagem. A nova técnica tem produzido imagens surpreendentemente claras e com arestas bem definidas mesmo usando uma quantidade extremamente pequena de dados de projeção.

Palavras-chaves: Difusão anisotrópica, reconstrução máxima entropia, tomografia computadorizada.

Abstract - Maximum entropy (MENT) is a well-known reconstruction technique based on the optimization of the entropy cost functional. If only small amount of acquired data are available, the result of this algorithm converges to a noisy and blurred image. We propose an improvement to this algorithm that consists on applying alternately the MENT reconstruction and the robust anisotropic diffusion (RAD). We have tested this idea for the reconstruction of parallel projection data from complete angular sampling, but the idea can be applied to any data acquisition scenario. The new technique has yielded surprisingly clear images with sharp edges even using extremely small amount of projection data.

Index Terms: Anisotropic diffusion, maximum entropy reconstruction, computerized tomography.

1.Introdução

Tomografia é uma técnica usada para obter a distribuição de um meio não observável diretamente a partir de suas projeções. Ela tem um amplo espectro de aplicações que vão do campo atômico ao cósmico.

Existem muitas técnicas de reconstrução por exemplo, retro-projeção filtrada [1], máxima entropia [2, 3], transformada de Fourier [1], etc. Neste artigo, estamos interessados em técnicas de tomografia que geram imagens reconstruídas de boa qualidade mesmo usando uma quantidade pequena de dados de projeção. Em muitas aplicações práticas, é vantajoso minimizar a irradiação, para não danificar a amostra sendo irradiada ou para apressar a aquisição dos dados. O algoritmo de máxima entropia (MENT) é uma das melhores técnicas quando somente

poucos dados estão disponíveis. Porém, mesmo este método produz imagens borradas com ruídos e artefatos numa situação de dados escassos. Delaney and Bresler propuseram uma técnica tomográfica especialmente projetada para gerar imagens claras a partir de poucos dados [4]. Porém, na prática este algoritmo requer uma quantidade um tanto grande de dados para gerar uma imagem clara.

Difusão anisotrópica é uma técnica bem conhecida usada para filtragem, detecção de arestas e análise multi-escala. Recentemente, Black et al. descreveram a relação entre difusão anisotrópica e estatística robusta, resultando numa técnica teoricamente sólida denominada difusão anisotrópica robusta (RAD) [5].

Neste artigo, melhoramos o algoritmo MENT usando a filtragem RAD. A idéia principal deste novo algoritmo é intercalar, em cada etapa iterativa do MENT, uma filtra-

gem RAD. Esta idéia é bastante diferente de uma simples pós-filtragem da imagem gerada pelo MENT. Como o algoritmo MENT gera uma imagem muito borrada e ruidosa em situação de poucos dados, nenhuma pós-filtragem consegue melhorar substancialmente a qualidade das imagens geradas. Porém, incorporando a filtragem RAD dentro do algoritmo MENT, imagens nitidamente reconstruídas podem ser obtidas mesmo usando poucos dados de projeção.

Descrevemos nossas idéias para um ambiente de aquisição de dados em feixe paralelo e ângulo completo (180°) sem nenhum dado em falta. Implementamos e testamos a técnica proposta somente para esta situação. Porém, as idéias desenvolvidas neste artigo podem ser aplicadas diretamente a qualquer cenário de aquisição: feixe paralelo ou divergente, ângulo completo ou limitado, com ou sem dados em falta. Testamos nosso algoritmo usando uma quantidade extremamente pequena de dados. Sob esta condição, o algoritmo MENT original gera imagens ruidosas e borradas onde mesmo as arestas importantes não são claramente reconstruídas. Nosso algoritmo gerou imagens nítidas.

2. Algoritmos de Reconstrução

2.1 Retro-Projeção Filtrada

Retro-projeção filtrada é uma técnica de reconstrução de imagem clássica [1]. Este algoritmo produz boas imagens reconstruídas se os dados de projeção são abundantes e disponíveis em ângulo completo. Infelizmente, este algoritmo produz reconstruções pobres se existem poucas projeções, projeções em falta ou se as projeções estão distribuídas em ângulo limitado. Iremos usar retro-projeção filtrada para obter a imagem reconstruída “ideal” quando projeções estão disponíveis abundantemente.

2.2 Algoritmo de Máxima Entropia

Minerbo propôs o algoritmo MENT em [6] e em seguida muitos autores propuseram diferentes melhorias a este algoritmo [2, 3]. Nesta seção, explicamos muito brevemente a versão de Reis e Roberty do algoritmo MENT, adotando a mesma notação que eles usaram em [2].

O problema de reconstrução consiste em encontrar uma função imagem alvo $f(x, y) \geq 0$. Vamos denotar a versão discretizada deste função como f_s , onde s representa um pixel. Reis e Roberty reconstróem a função alvo f numa “partição de base natural”, que possui uma resolução sub-pixel. Eles denotaram um elemento da base natural como e e a imagem alvo nesta partição como f_e , isto

é:

$$f_s^{(i)} = \sum_{e \in s} f_e^{(i)}, \quad i \geq 1 \quad (1)$$

onde (i) é o passo de iteração do algoritmo MENT.

Vamos supor que há J projeções paralelas. Reis e Roberty denotaram a faixa na projeção $j \in [1, J]$ que contém o sub-pixel e como $nj(e)$. A função alvo f no sub-pixel e pode ser computada usando a seguinte equação :

$$f_e^{(i)} = \frac{1}{A} \prod_{j=1}^J F_{j,nj(e)}^{(i)}, \quad i \geq 1 \quad (2)$$

onde A é a área total do objeto a ser reconstruído e $F_{j,nj(e)}^{(i)}$ é o parâmetro dual de Lagrange associado à faixa $[j, nj(e)]$. Um parâmetro de Lagrange $F_{j,nj}^{(i)}$ pode ser computado iterativamente usando dados tomográficos experimentais $h_{j,nj}$ e a largura z da projeção j :

$$F_{j,nj}^{(i+1)} = \begin{cases} z h_{j,nj}, & i = 0 \\ \frac{h_{j,nj} A}{\sum_{e=1}^{NE} a_e \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^J F_{k,nk(e)}^{(i)}}, & 1 \leq i < \zeta \end{cases} \quad (3)$$

onde NE é o numero de elementos da faixa $[j, nj]$ e a_e é a área do elemento e .

A inicialização $F_{j,nj}^{(1)} = z h_{j,nj}$ na equação (3) é somente uma aproximação pouco acurada dos parâmetros de Lagrange desconhecidos. Assim, a fórmula (3) deve ser iterada muitas vezes até a convergência. Infelizmente, erros numéricos do produto $\prod_{k=1, k \neq j}^J F_{k,nk(e)}^{(i)}$ na equação (3) se propagam muito rapidamente quando a fórmula iterativa é computada [2]. Isto conduz a uma reconstrução pouco nítida e ruidosa. Se a imagem alvo fosse conhecida aproximadamente, parâmetros de Lagrange mais acurados poderiam ser encontrados. Assim, propomos usar a imagem reconstruída pelo MENT e filtrada pelo RAD como uma estimativa da imagem alvo f . Esta imagem estimada irá permitir-nos encontrar uma melhor estimativa dos parâmetros de Lagrange.

3. Difusão Anisotrópica Robusta

Black et al. [5] propuseram recentemente a difusão anisotrópica robusta (RAD). Ela assume que a entrada é uma imagem constante em cada região corrompida por ruído aditivo Gaussiano de média zero e pequena variância. O objetivo é estimar a imagem original a partir de dados ruidosos. Black et al. usaram a estatística robusta para resolver este problema. Eles computaram uma imagem I

que satisfaz o seguinte critério de otimização :

$$\min_I \sum_{s \in I} \sum_{p \in \eta_s} \rho(I_p - I_s, \sigma) \quad (4)$$

onde I_s é o valor da imagem I no pixel s , η_s é a vizinhança espacial do pixel s , $\rho(\cdot)$ é uma norma de erro robusta e σ é um parâmetro de escala. A equação (4) pode ser resolvida pelo método do gradiente descendente :

$$I_s^{(t+1)} = I_s^{(t)} + \frac{\lambda}{|\eta_s|} \sum_{p \in \eta_s} g\left(\left|\nabla I_{s,p}^{(t)}\right|\right) \nabla I_{s,p}^{(t)} \quad (5)$$

onde $g(x) = \rho'(x)/x$, a constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ é um escalar que determina a taxa de difusão, e $\nabla I_{s,p}^{(t)}$ representa o gradiente de intensidade no pixel s em relação ao pixel vizinho p .

Black et al. escolheram o estimador de Tukey como a norma de erro e ele tem mostrado ser um excelente detector de bordas.

$$g(\nabla I, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{|\nabla I|}{\sigma} \right)^2 \right]^2, & \text{se } |\nabla I| \leq \sigma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

Vamos supor que a imagem I consiste de regiões com níveis de cinza constantes. Intuitivamente, RAD calcula a média dos pixels vizinhos dentro de uma região, e evita calcular a média entre regiões. Assim, este processo atenua ruídos ao mesmo tempo em que preserva nitidamente a forma das arestas entre regiões .

4. Algoritmo de Máxima Entropia Melhorado

Vamos supor que a imagem a ser reconstruída é constante região por região. Como notamos antes, em condições de poucos dados de aquisição, o algoritmo MENT reconstrói imagem f pouco nítida e ruidosa. Esta imagem pode estar tão fortemente corrompida que nenhum processo de pós-filtragem pode melhorá-la substancialmente. RAD é um excelente estimador da imagem original f a partir de sua versão corrompida. Porém, usando-a como um processo de pós-filtragem, somente uma leve melhoria pode ser obtida. Nossa idéia é usar esta imagem levemente melhorada para encontrar uma melhor estimativa dos parâmetros de Lagrange. Parâmetros de Lagrange mais acurados geram uma imagem reconstruída melhor. Esta imagem melhorada pode ser realçada ainda mais por RAD e usada para encontrar parâmetros ainda melhores de Lagrange. E assim por diante.

Usamos as equações (3) e (5) para compor o algoritmo de reconstrução-difusão. Inicialmente, aplicamos o algoritmo MENT puro, iterando a equação (3) ζ vezes. Usando

as equações (1) e (2), a imagem reconstruída $f^{(\zeta)}$ é obtida. Esta imagem será usada para calcular a estimativa inicial dos parâmetros de Lagrange, a serem usados no seguinte algoritmo de reconstrução-difusão:

$$F_{j,nj}^{(i+1)} = \frac{h_{j,nj}}{\sum_{e=1}^{NE} a_e \left[f_e^{(i)} + \frac{\lambda}{|\eta_s|} \sum_{p \in \eta_s} g\left(\left|\nabla f_{s,p}^{(i)}\right|\right) \nabla f_{s,p}^{(i)} \right] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^J F_{k,nk}^{(i)(e)}}, \quad (7)$$

(para $\zeta \leq i < v$)

Note que a expressão dentro dos colchetes da equação (7) é a imagem filtrada por RAD. O denominador é o dado de projeção reconstruído da faixa $[j, nj]$. Parece que filtrando as imagens intermediárias com RAD, a propagação de erro nos parâmetros de Lagrange é minimizada.

5. Resultados Experimentais

O objeto teste simulado é um cilindro com diâmetro 100 e densidade 5. Este cilindro contém cinco cilindros internos arranjados em série e deslocados do centro. O primeiro e o maior, no canto direito superior, tem diâmetro 20 e densidade 15. O segundo tem diâmetro 14 e densidade 20. O terceiro tem diâmetro 10 e densidade 23. O quarto tem diâmetro 8 e densidade 25. O quinto tem diâmetro 5 e densidade 25. A densidade do fundo é 0,0. A máxima densidade nesta escala é 25. O phantom gerado artificialmente é mostrado na figura 1a.

O conjunto de dados experimentais consiste de somente 6 projeções paralelas sobre 180° com 100 raios por projeção (600 raios ao todo). O algoritmo MENT clássico, e o algoritmo MENT+RAD reconstrução-difusão foram executados com estes dados, gerando respectivamente as imagens 1b e 1c. Claramente, o algoritmo reconstrução-difusão gerou a melhor imagem. Imagem 1b foi obtida iterando 30 vezes o algoritmo MENT clássico. Esta imagem foi usada como a estimativa inicial da imagem a ser reconstruída pelo algoritmo de reconstrução-difusão. Este algoritmo foi iterado 30 vezes usando o parâmetro de escala $\sigma=5$, gerando a imagem 1c. A imagem 1d é obtida pós-processando a imagem 1b pelo filtro RAD ($\sigma=25$ e 100 iterações). Claramente, uma pós-filtragem não pôde gerar uma imagem reconstruída nitidamente. O critério de parada para as iterações baseia-se na convergência dos parâmetros de controle para ambos métodos. A escolha de sigma é manual e baseia-se num critério de busca binária entre dois limiares diferentes até encontrar o limiar que permite uma difusão das regiões homogêneas da imagem reconstruída preservando as arestas entre os diferentes contornos.

Todas as imagens têm resolução 100×100 pixels. A diferença absoluta média entre a imagem ideal 1a e as imagens 1b, 1c, 1d, são respectivamente 12,74%, 7,52%, 12,84%.

6. Conclusão

Neste artigo, propusemos um algoritmo MENT melhorado. Esta nova técnica é baseada em difusão anisotrópica robusta. O novo algoritmo gerou uma imagem clara mesmo usando uma quantidade muito pequena de dados de projeção. A imagem reconstruída contém pouco ruído e as arestas são claramente visíveis. O método proposto tem mostrado ser superior ao algoritmo MENT clássico e a retro-projeção filtrada. Os dados experimentais mostram a eficácia da técnica proposta.

7. Agradecimentos

Os autores expressam a sua gratidão a FAPESP (processos 2001/02400-9 e 2000/08209-6) e a CNPq (processo 300689/98-5) pela assistência financeira parcial deste trabalho.

Referências

1. A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
2. M. L. Reis and N. C. Roberty, "Image Reconstruction Using the Method of Maximum Entropy," *Inverse Problems*, vol. 8, no. 4, pp. 623-644, 1992.
3. J. Dusasoy and I. E. Abdou, "The Extend MENT Algorithm: A Maximum Entropy Type Algorithm Using Prior Knowledge for Computerized Tomography," *IEEE T. Signal Processing*, vol. 39, no. 5, pp. 1164-1180, May 1991
4. Alexander H. Delaney and Y. Bresler, "Globally Convergent Edge-Preserving Regularized Reconstruction: An Application to Limited-Angle Tomography," *IEEE T. Image Processing*, vol. 7, no. 2, February 1998.
5. M. J. Black, G. Sapiro, D. H. Marimont, and D. Heeger, "Robust Anisotropic Diffusion," *IEEE T. Image Processing*, vol. 7, no. 3, March 1998.
6. G. Minerbo, "MENT: A Maximum Entropy Algorithm for Reconstructing a Source from Projection Data," *Comput. Graph. Image Processing*, vol. 71, pp. 48-68, 1979.

Contato

Av. Prof. Luciano Gualberto, tr. 3, 158,
CEP 05508-900, São Paulo, SP, Brasil

Tel: (0xx11) 3091-5605

Fax: (0xx11) 3091-5718

E-mails: haroldivan@lps.usp.br, hae@lps.usp.br

<http://www.lps.usp.br/~hae>

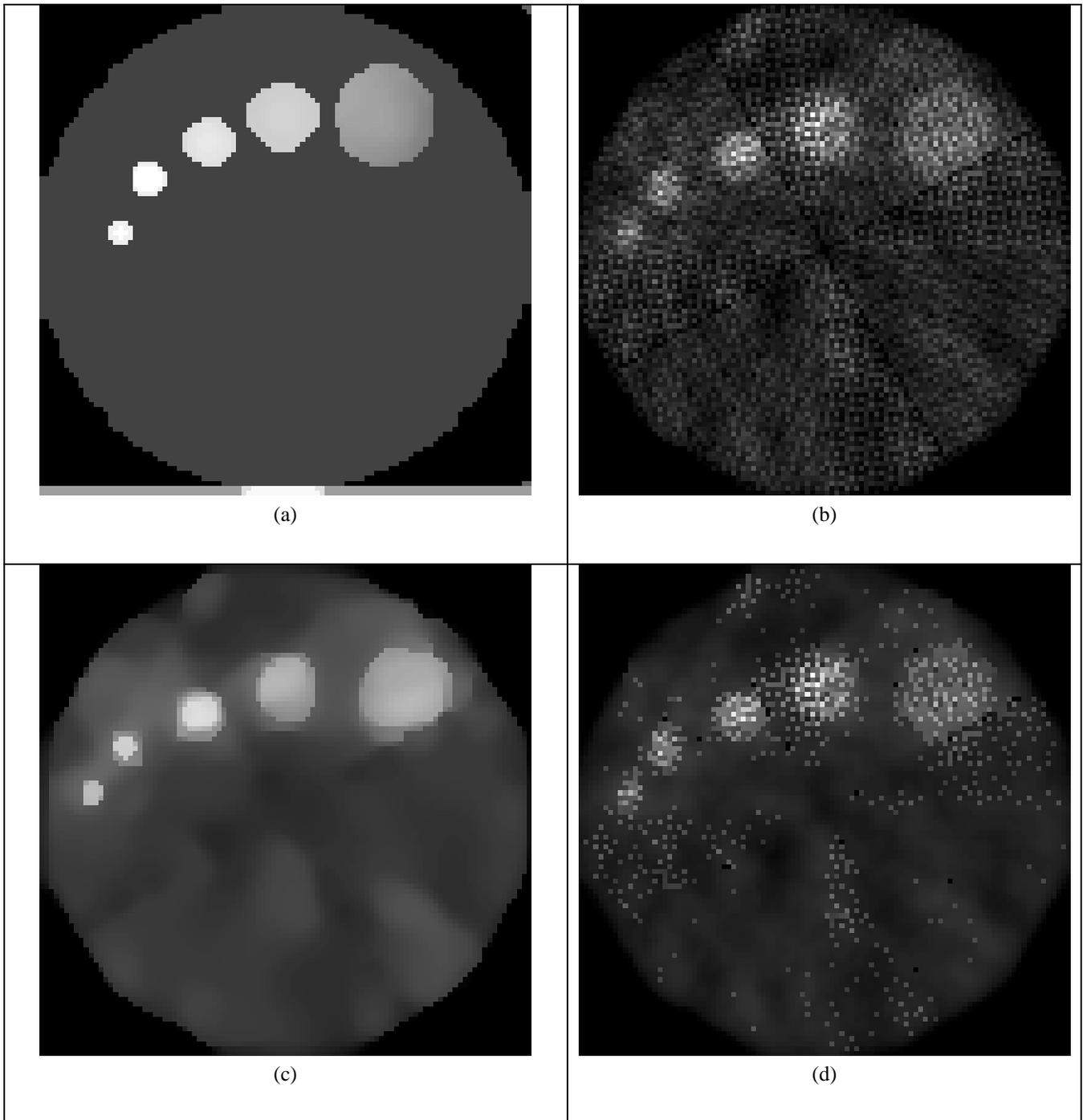


Fig. 1: (a) Phantom sintético; (b) MENT usando 600 raios; (c) algoritmo reconstrução-difusão proposto usando 600 raios; (d) imagem 1b filtrada pelo RAD.